

# Hve stórar eru hitabreytingar jarðar?

Málstofa Seðlabankans

Helgi Tómasson  
helgito@hi.is

13. október 2022

# Skipulag fyrirlestrar

- Kynning
- Söguleg atriði úr tímaraðagreiningu, helstu hugtök
- Nokkur einföld líkön, sístæðni ofl.
- Notkun tímaraðaðferða í hagrannsóknum
- Hvað er long-memory, Hurst og rennsli í Níl
- Dæmi um þróun hitastigs, Dagsvik et al. (2020)
- Nokkur atriði long-memory greiningu.
- Lokaorð

- Lauk BS í stærðfræði-reiknifræði 1977, vildi forðast teikningu og skýrslugerð.
- Framhaldsnám í Gautaborg/Svíþjóð 1977
- Gautaborg valin vegna frægs tímaráðamanns, Herman Wold.
- Var látinn lesa líkindafræði eftir Whittle.
- Hef alla tíð verið reiknisinnaður, vil fá útkomu eigin forrit o.s.frv.
- Kynni af tímaröðum í HÍ, forritaði algoritma Box & Jenkins (1976) í Seðlabankanum
- Hugmyndin að þessum fyrirlestri kom vegna heimboðs í Norges Handelshøjskole, í Bergen.

- Wold var upphafsmaður ARMA líkan, frumkvöðull ekonometríunnar, tengdasonur Svante Arrhenius. Keypti nýlega „Demand Analysis“, klassíska bók.
- Hann hafði amk. 3 fræga doktorsnemendur, Whittle, Jöreskog (Lisrel) og Malmquist (Malmquist-index).
- Kennslubók Whittle í líkindafræði byggir á að skilgreina fyrst væntalega gildið.
- Minn námstími einkenndist af deilum hagfræðinga sem ekki kunnu tímaraðaaðferðafræði og þeirra sem voru að sér um tímaraðir.
- Deilurnar dofna mikið eftir uppfinningu „co-integration“, og manna eins og Nóbelsverðlaunahafanna Granger og Sims.

## Hvað er spá?

To formalize some symbolic notation is introduced. The vector of interest is denoted  $\mathbf{y}(t)$ . It is assumed to be observed at discrete time points,  $\mathbf{t}_{past} = t_1 \dots t_T$  for past time and  $\mathbf{t}_{future}$  with  $\mathbf{t}_{future} > \mathbf{t}_{past}$ . The corresponding values of  $\mathbf{y}(t)$  are,  $\mathbf{y}_{future}$  and  $\mathbf{y}_{past}$ . If  $\mathbf{y}_{future}$ , and  $\mathbf{y}_{past}$  are written as vectors:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{y}_{future}) &= \boldsymbol{\mu}_{future}, \\ E(\mathbf{y}_{past}) &= \boldsymbol{\mu}_{past}, \end{aligned}$$

and the corresponding variance matrix:

$$V \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{future} \\ \mathbf{y}_{past} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{future} & \Sigma_{future,past} \\ \Sigma_{past,future} & \Sigma_{past} \end{bmatrix}.$$

Then standard textbooks give the following expressions for the conditional expectation and variance:

$$E(\mathbf{y}_{future} | \mathbf{y}_{past}) = \boldsymbol{\mu}_{future} + \boldsymbol{\Sigma}_{future,past} \boldsymbol{\Sigma}_{past}^{-1} (\mathbf{y}_{past} - \boldsymbol{\mu}_{past}) \quad (1)$$

$$V(\mathbf{y}_{future} | \mathbf{y}_{past})/s = \boldsymbol{\Sigma}_{future} - \boldsymbol{\Sigma}_{future,past} \boldsymbol{\Sigma}_{past}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{past,future} \quad (2)$$

Equations 1 and 2 give the best linear predictor and its variance. The latter part of 2 shows the gain of the prediction.

- Stærðfræðilega auðvelt, en getur verið erfitt að reikna út í praxis.

## Söguleg atriði, helstu hugtök

- Fylgnireikningar á tímaraðagögnum eru varasamir, Yule (1926). Spurious-regression, mortality, markaðshlutdeild Ensku kirkjurnnar í brúðkaupum
- Hef látið nemendur simulera tvo dýnamíska ferla og reikna fylgni í 30 ár.
- Stöðugleikahugtök, stationarity/ergodicity, nauðsynlega.
- Box & Jenkins (1976) tóku saman aðferðafræðipakka fyrir spár stýringar. Í einni vídd ARIMA(p,d,q), hugsanlega með árstíðabáttum. Sönnuðu yfirburði sína í skammtímaspám
- Að mestu einvitt, eitt input og eitt output leyft. Hagfræðingar ekki impressed.
- Aðferðafræðin byggir á að skoða auto-correlation, (sjálffylgni) og spektrum.
- Granger finnur upp co-integration ca. 1980. Þ.e., ef tveir ósístæðir ferlar, er  $I(1)$ , þá sé hugsanlega til fall af þeim sem sé  $I(0)$ .  $I(1)$  er fyrsti mismunur.
- Hefur  $I(d)$  merkingu þar sem  $d$  er brot? Það er kallað long-memory.

## Hvað er short memory?

- Við kunnum fræðin um línulegar diffurjöfnur

$$dy = y' = ay \quad \text{finnum fallið } y(t)$$
$$y(t) = \exp(at)y(0)C.$$

- Í tímaraðafræðum er samsvarandi AR(1), líkan:

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

$$\Delta Y_t = (\phi - 1)Y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

$$E(\varepsilon_t) = 0, V(\varepsilon_t) = \sigma^2, E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, \text{ ef } t \neq s,$$

$$Y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}.$$



- Línulegar diffurjöfnur/mismunajöfnur, einkennast af „veldisminnkun“ , ef  $a < 0$ , eða  $-2 < \phi - 1 < 0$ .
- Sjálffylgni í AR(1) er á forminu,  $\phi^k$ . Þ.e.tengslin:

$$E(Y_t | Y_s)$$

veikjast í veldistakti með vaxandi  $|t - s|$ .

- AR(1) í samfelldum tíma algerlega hliðstætt:

$$dY = aYdt + \sigma dW, \quad W(t) \text{ Wiener ferli,}$$

$$Y(t) = \exp(at)Y(0) + \sigma \exp(at) \int_0^t \exp(-as) dW(s).$$

- Úvíkkast í margar víddir og flóknari sjálffylngistrúktúr, ARMA.

- Í strjálum tíma:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

- og í samfelldum tíma:

$$Y(t) = \alpha_1 Y^{(1)}(t) + \dots + \alpha_p Y^{(p)}(t) + dW + \beta_1 W^{(2)}(t) + \dots + \beta_q W^{(q+1)}(t).$$

Hér táknar  $Y^{(j)}$   $j$ -tu afleiðu. Þetta er að sjálfsögðu formlegt því  $W(t)$  er ekki diffranlegt, hvað þá að til séu hærrí afleiður. Þetta má skilgreina rétt á state-space formi.

# Spectral eigenleikar

- Það getur verið hentugt að vinna með operatora,  $L$  eða  $B$ , lag eða backward operator í strjálum tíma og  $D$  diffur operator í samfelldum tíma.

$$LY_t = BY_t = Y_{t-1}, \quad DY(t) = Y'(t).$$

- Það er stundum hentugt að setja ARMA hreyfimyntur fram á margliðuformi:

$$\begin{aligned} \Phi(L)Y_t &= \Theta(L)\varepsilon_t, & \text{í strjálum tíma og} \\ A(D)Y(t) &= B(D)dW(t), & \text{í samfelldum tíma.} \end{aligned}$$

- Variáns af rétt sköluðu Fourier-transformi er kalla spectralfall og form spektralfalls ARMA ferlis er sérlega hentugt.

$$f_Y(\omega) = \frac{\sigma^2 |\Theta(\exp(i\omega))|^2}{2\pi |\Phi(\exp(i\omega))|^2}, \quad \text{í strjálum tíma og}$$

$$f_Y(\omega) = \frac{\sigma^2 |B(i\omega)|^2}{2\pi |A(i\omega)|^2}, \quad \text{í samfelldum tíma.}$$

- Þetta eru ræð föll (rational spectrum).

- Spectral fallið inniheldur allar (annarar gráðu) upplýsingar um hreyfimylnstur ARMA ferlisins og er jafngilt auto-covariance fallinu.
- Gagnlegur eiginleiki er að ef hreyfimylnstur tveggja (óháðra) ferla er þekktur þá er auðvelt að leiða út hreyfimylnstur summu þeirra.
- T.d. ef  $Y_1(t)$  og  $Y_2(t)$  eru óháðir AR(1) í samfelldum tíma:

$$dY_1(t) = \alpha_1 Y_1(t)dt + \sigma_1 dW_1(t) \text{ og}$$

$$dY_2(t) = \alpha_2 Y_2(t)dt + \sigma_2 dW_2(t),$$

- þá er:

$$f_{Y_1+Y_2}(\omega) = f_{Y_1}(\omega) + f_{Y_2}(\omega) =$$

$$\frac{\sigma_1^2}{2\pi} \frac{1}{\omega^2 + \alpha_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2\pi} \frac{1}{\omega^2 + \alpha_2^2}, \text{ þ.e. } ARMA(2, 1).$$

# ARIMA

- Ef margliðurnar  $\Phi(z)$  eða  $A(z)$  hafa ákveðnaeiginleika, rætur  $\Phi$  utan einingahrings, eða rætur  $A$  með neikvæðan rauntöluhluta þá gildir að:

$$V(Y) = \int f(\omega) d\omega < \infty, \text{ integral yfir viðeigandi mörk,}$$

auto-covariance og spektralfallið bara fall af föstum parametrum, þ.e.ferli weakly-stationary.

- Grafísk skoðun getur leitt í ljós að ósennilegt er að undirliggjandi ferlar séu stationary.
- Fræg bók, Box & Jenkins (1976), lagði til að í stað þess að vinna með mælingar á  $Y_t$  beint, væri  $\Delta^d Y_t = (1 - L)^d Y_t$  skoðað.
- Slík ferli voru kölluð ARIMA(p,d,q)
- Aðferðafræðin gengur m.a. út að skoða úrtaks ACF og PACF fyrir  $\Delta^d y_t$  og reyna síðan að giska á  $p, d, q$ . Miðað var við að prófa  $d = 0, 1, 2, \dots$

- Vitað er að fyrir random-walk, ARIMA(0,1,0) einkennist ACF af beinni línu, en fyrir stationary ARMA(p,0,q) ferla einkennist ACF af að minnsta kosti veldisminnkun.
- Er eitthvað til þarna á milli? Er brotdiffrun möguleg?
- Já. Maður getur skoðað binomial-útvíkunna á  $(1 - L)^d$ , þar sem  $d$  er brot.

$$(1 - L)^d Y_t = \varepsilon_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j},$$

$$\psi_j = \frac{d(1+d) \cdots (j-1+d)}{j!}.$$

- Svona  $Y_t$  hefur margliðu minnkun í ACF.
- Spectralfallið  $f_Y(\omega)$  er  $\infty$  fyrir  $\omega = 0$ , en ef  $-1/2 < d < 1/2$  gildir að  $V(Y_t) = \int f(\omega) d\omega < \infty$ , þ.e.  $Y_t$  er stationary.

- Hvernig datt mönnum þetta í hug?
- Vatnaverksfræðingur Hurst (1951) var að athuga flóðahæð í Níl í nokkrar aldir og tali sig sjá pólýnómial lækkun á ACF.
- Í random-walk í samfelldum tíma (Brown/Wiener-ferli) gildir að:

$$E(W(t)W(s)) = \sigma^2(t - s), \quad t > s > 0.$$

- Hugmynd Hurst var sett fram:

$$E(W_H(t)W_H(s)) = \sigma^2/2(t^{2H} + s^{2H} - (t - s)^{2H}), \quad t > s > 0.$$

- $H$  er kallað Hurst exponent og  $d = H - 1/2$ .
- $W(t + 1) - W(t)$  er kallað „white-noise“, og ef  $W_H$  er normal-dreift er  $W_H(t + 1) - W_H(t)$  kallað „fractional Gaussian noise“.



- Spectralfall ARFIMA(p,d,q) er á forminu:

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \underbrace{|(1 - \exp(i\omega))|^{-2d}}_{\text{long-memory}} \frac{|\Theta(i \exp(\omega))|^2}{|\Phi(i \exp(\omega))|^2}$$

- ARFIMA(p,d,q) með  $0 < d < 1/2$  hefur þann eiginleika að  $f(0) = \infty$ ,  $\int f(\omega) d\omega = \text{VAR}(Y(t))$  og auto-covariancar  $\gamma(k)$
- Líkindafræðilega eru þetta ekki Markov margingales (ef  $d < 1/2$ ).
- Tölfræðilegur vandi er að giska á  $d$  (og  $\phi_i, \theta_i$  og  $\sigma$  út frá mælingum).
- Vegna þess hve mælingar eru háðar verða ályktanir um t.d. meðaltal  $\mu = E(Y(t))$  og þýðingu ytri stærða frábrugðnar hefðbundinni ályktanafraði.

# Ýmsar útvíkkarir og hagnýtingar

- Baillie & Chung (2002) skoða árhringi úr trjám.
- Chan & Palma (1998) sýna state-space nálgun.
- Comte & Renault (1996) sýna hvernig megi skilgreina fractional  $W_H$  í samfelldum tíma í mörgum víddum.

## Nokkur R forrit

- longmemo arfima artfima LongMemoryTS fracdiff, rugarch, forecast, garma, vgam, waveslim, tsvge, o.s.frv.
- garma=Gegenbauer-ARMA, Gegenbauer er ákveðin fjöldskylda af margliðum. Gegenbauer ARMA leyfir óendanlegt spectur í fleiri tíðnum en 0, t.d. vegna árstíða. (Hunt)

# Boðsfyrirlestur til Bergen

$$\mathbf{y}^{(p)}(t) = A_1 \mathbf{y}^{(p-1)}(t) + \dots + A_p \mathbf{y}(t) + d\mathbf{W}(t) + B_1 d\mathbf{W}^{(2)}(t) + \dots + B_q d\mathbf{W}^{(q+1)}(t),$$

$$V(d\mathbf{W}(t)d\mathbf{W}(t)') = \Sigma dt,$$

$$A_i = \begin{bmatrix} \alpha_{11,i} & \alpha_{12,i} & \dots & \alpha_{1d,i} \\ \alpha_{21,i} & \alpha_{22,i} & \dots & \alpha_{2d,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{d1,i} & \dots & \dots & \alpha_{dd,i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$B_j = \begin{bmatrix} \beta_{11,j} & \dots & \dots & \beta_{1d,j} \\ \beta_{21,j} & \dots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{d1,j} & \dots & \dots & \beta_{dd,j} \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, q.$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t), \quad \mathbf{C} \quad pd \times d \quad (15)$$

ARMA

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t)dt + \mathbf{R}d\mathbf{W}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} I_d \\ 0_d \\ \vdots \\ 0_d \end{bmatrix} \quad (16)$$

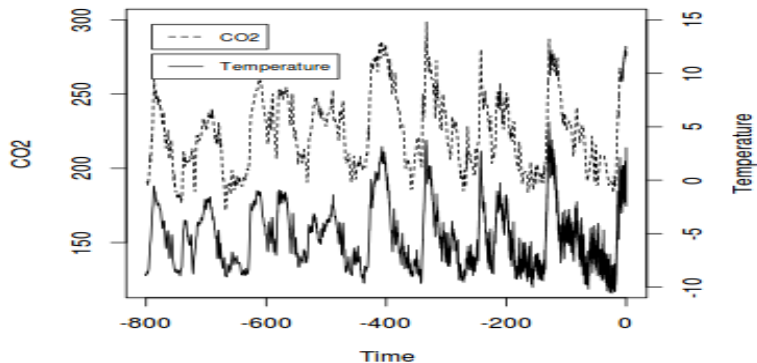
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 & I_{d \times d} & 0_{d \times d} & \dots & \dots & 0_{d \times d} \\ A_2 & 0_{d \times d} & I_{d \times d} & 0_{d \times d} & \dots & 0_{d \times d} \\ \vdots & 0_{d \times d} & 0_{d \times d} & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{p-1} & 0_{d \times d} & 0_{d \times d} & \dots & \dots & I_{d \times d} \\ A_p & 0_{d \times d} & 0_{d \times d} & \dots & \dots & 0_{d \times d} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} B_q \\ \vdots \\ B_1 \\ I_{d \times d} \end{bmatrix}.$$

State-space

Kees van Montfort · Johan H.L. Oud  
Manuel C. Voelkle *Editors*

# Continuous Time Modeling in the Behavioral and Related Sciences

# Hiti og CO<sub>2</sub> í 800.000 ár



# Samband við Dagsvik

- Á fyrirlestrinum í Bergen sögðu menn mér frá Dagsvik.
- Dagsvik og félagar höfðu metið long-memory líkön á mörg hundruð tímaröðum af instrumental hitamælingum, ca. 200 ára tímabil og röðum sem voru enn lengri (Moberg-data).
- Hafði samband við Dagsvik, fékk handrit að grein, forrit og gögn.
- Greinin birtist síðan í Dagsvik et al. (2020).
- Fractional-integration/co-integration eru flókin fræði sem tekur tíma að tileinka sér. Margar fjármála-/hagstærðir virðast hafa flóknari dýnamikn random-walk.

## R-pakkinn frá Dagsvik

```
require(tempFGN)
setwd("/home/helgi/dagsvik-climate/dagsvik-temperatur/tempFGN/i
data_supporting_path <- file.path("data", "supporting")
data_moberg_path <- file.path("data", "moberg")
data_final_path <- file.path("data","final")
```

```
selected=read.csv(file.path(data_supporting_path, "T0.SelInfo.c
moberg <- read.table(file.path(data_moberg_path, "Moberg data.t
header = T, na.strings = 99)
```

```
reykjavik=read.table("data/raw/island/reykjavik.txt")
```

Fæ röð fyrir Reykjavík, ca. 130 ár og trjáhringjaröð, ca. 2000 ár.



## Kennslubókarsýnidæmi: París í 250 ár

- Meðalhiti á mánuði frá 1757 til 2009.
- Set upp kennslubókardæmi, random-walk með drift og einni sveiflu.

$$y_t = \mu_t + \psi_t + \varepsilon_t$$

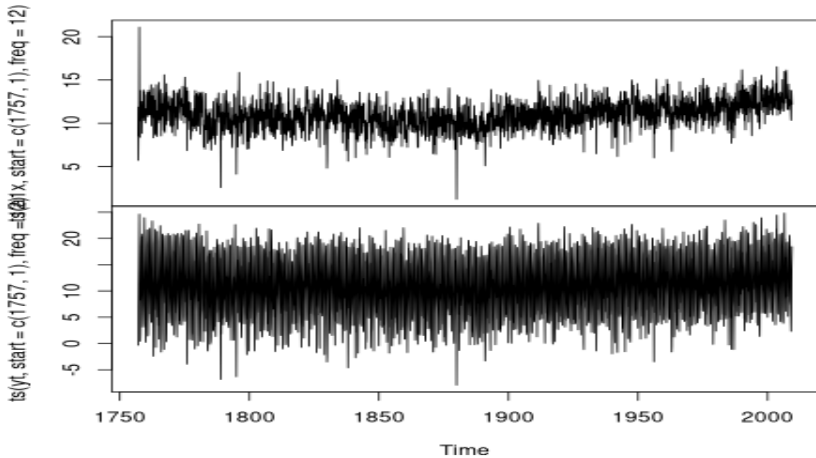
$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_t + \xi_t$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \eta_t$$

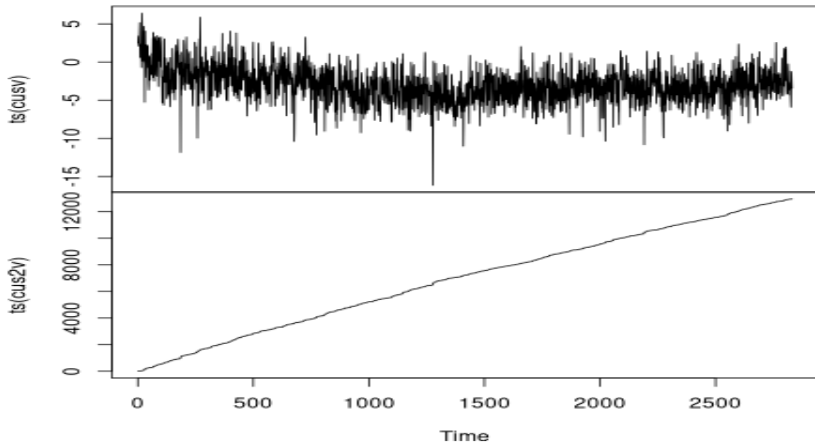
$$\begin{bmatrix} \psi_t \\ \psi_t^* \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos(\lambda_c) & \sin(\lambda_c) \\ -\sin(\lambda_c) & \cos(\lambda_c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{t-1} \\ \psi_{t-1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_t \\ \kappa_t^* \end{bmatrix}$$

- Met svo upphafsgildi ástands, varíans á noise og innovation og  $\lambda_c$ .
- Kemur ekki á óvart að  $\hat{\lambda}_c \simeq 2\pi/12$ .

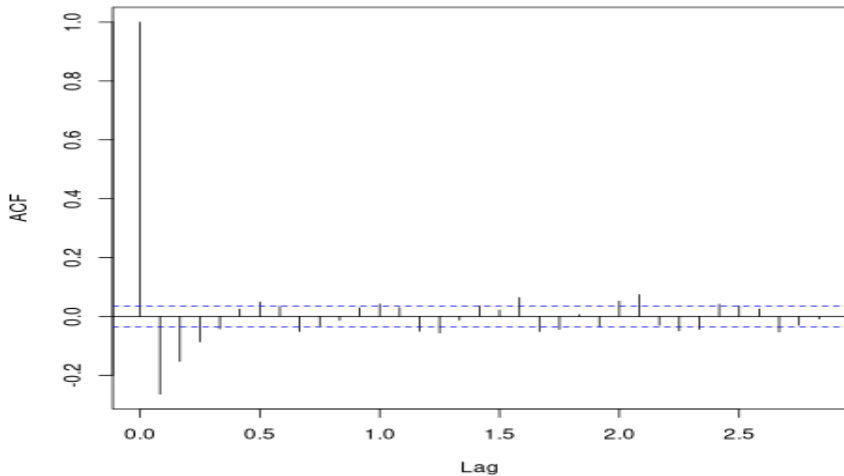
# yt og spáð state



## CUSUM og CUSUMSQ af spáskekkju



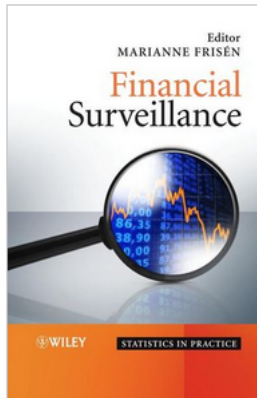
### Series vtx



# Útúrdúr

Birti kafla í vöktunarbók(surveillance um líkanið:

$$dX = \kappa(\mu - X)dt + \sigma X^\rho dW$$



Fi

Ma

ISBI

E-E

Fro



READ AN EXCERPT ▾

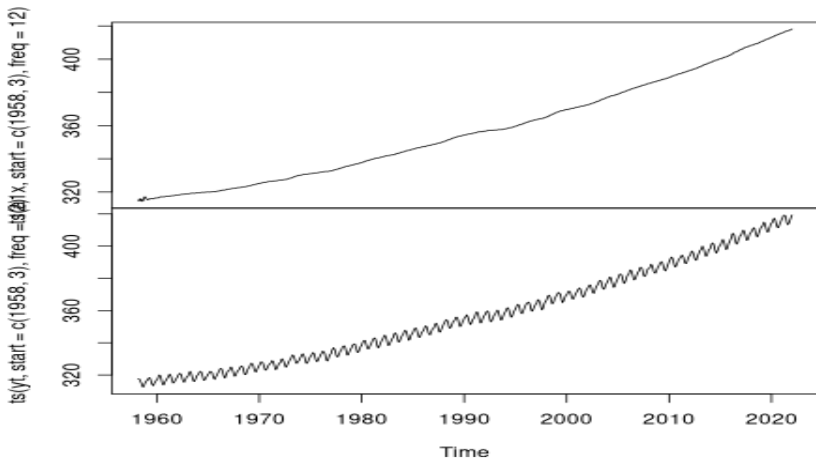
vakta  $\kappa$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  og  $\rho$ .



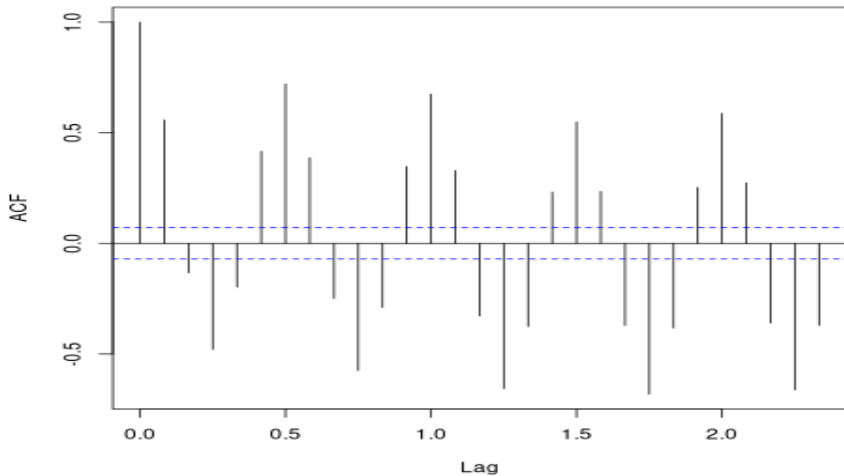
## Sama fyrir CO<sub>2</sub> (berist saman við t.d. París)

- Fæ gögn af: <https://www.esrl.noaa.gov/gmd/ccgg/trends/data.html>  
<https://towardsdatascience.com/time-series-modeling-for-atmospheric-co2-concentration-ppm-1958-2019-8425fadcb927>
- Þeirra árstíðaleiðréttu gögn (á síðunni) er nánast það sama og mitt  $\mu_{t|t-1}$ . Meðalhluftall 0.9999 og varíans mismunar  $10^{-6}$ .

## yt og spád state



### Series vtx







# STATISTICAL FORECASTING

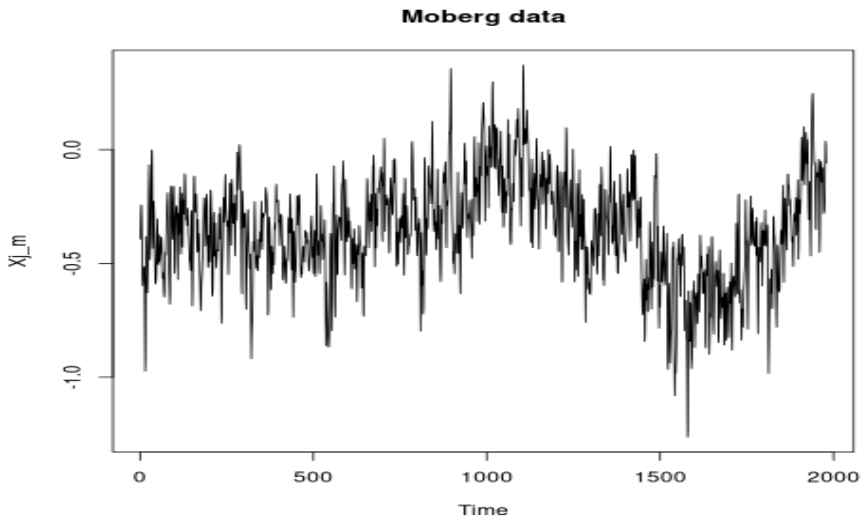
How fast will future warming be?

Terence C. Mills

## Eru þetta góð spálíkon?

- NEI! Þetta eru ARIMA(p,2,q) og spámörk vaxa mjög hratt. Stefna hratt á óendanlegt.
- Augljóst að hlýnun getur ekki verið mikil og hæpið að CO<sub>2</sub> geti hafa haft áhrif síðust ár.
- Einhvers konar long-memory nálgun, þar sem gert er ráð fyrir endanlegum varíans vænlegri. Mills er einn af þeim sem stakk upp á slíku. Beran(1994) einnig og margir fleiri.
- Höfundur kennslubókar stingur upp á þessu í grein(Bloomfield, 1992).
- IPCC raðirnar eru summur og Dagsvik et al. (2020).
- 200 ár eru stuttur tími og því hafa menn reynt sig við lengri raðir. Dagsvik sýnir röð sem kennd er við Moberg.
- Baillie & Chung (2002) tekur dæmi um 5000 ára tré (gögn í R).

# Moberg gögnin



- A new climate war brewing: forecasting vs. modeling

*A new paper published today by the Global Warming Policy Foundation explains how statistical forecasting methods can provide an important contrast to climate model-based predictions of future global warming. The repeated failures of economic models to generate accurate predictions has taught many economists a healthy scepticism about the ability of their own models, regardless of how complex, to provide reliable forecasts. Statistical forecasting has proven in many cases to be a superior alternative. Like the economy, the climate is a deeply complex system that defies simple representation. Climate modelling thus faces similar problems.*

- *Unfortunately the experts gathered together for the IPCC's work did not include statistical experts. This has resulted in some potentially serious flaws in the statistical work of the IPCC which I will describe shortly. These flaws will tend to exaggerate the extent of future climate change.* Trewin (2008)
- Scott Armstrong stofnandi, Journal of Forecasting og Internation Journal of Forcasting er ekki impressed. Hann talar um anti-scientific political movment Armstrong et al. (2011).
- Meðal tímaraðafólks er (hefur verið?) í gangi veðmál, T1000.zip. Þ.e. teknar hafa verið hitatölur í 135 ár, trend sigtuð frá en skammtímasveiflur skildar eftir. Síðan eru simuleraðar 1000 raðir með sama sveiflustrúktúr. Síðan er trend sem er 1-gráða/öld, bætt við 1/3 af röðunum, 0 bætti við 1/3 og síðan -1 við 1/3. Síðan er keppni reynið að flokka raðirnar rétt, verðlaun 100.000 dollarar. (Observeruð hlýnun á öld er ca. 0.6 gráður).
- Hef nýlega séð texta úr bók eftir rússneskan jarðeðlisfræðing (Privalsky) sem sér að loftslagsfólkið kann ekki tímaraðagreiningu.

## Úr tímaraðabókum, Cowpertwait & Metcalve (2009)

bls. 85

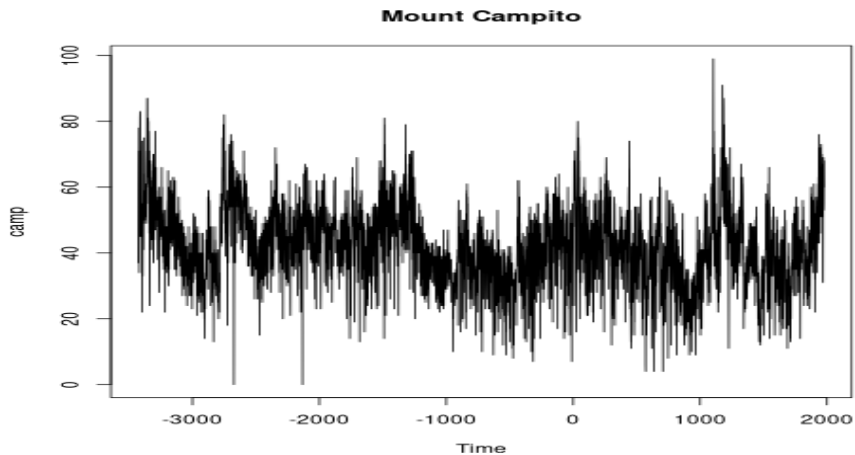
*The global temperature series was introduced in §1.4.5, where it was apparent that the data exhibited an increasing trend after 1970, which may be due to the 'greenhouse effect'. Sceptics may claim that the apparent increasing trend can be dismissed as a transient stochastic phenomenon. For their claim to be consistent with the time series data, it should be possible to model the trend without the use of deterministic functions. Consider the following AR model fitted to the mean annual temperature series:*

```
> www = "http://www.massey.ac.nz/~pscowper/ts/global.dat"  
> Global = scan(www)
```

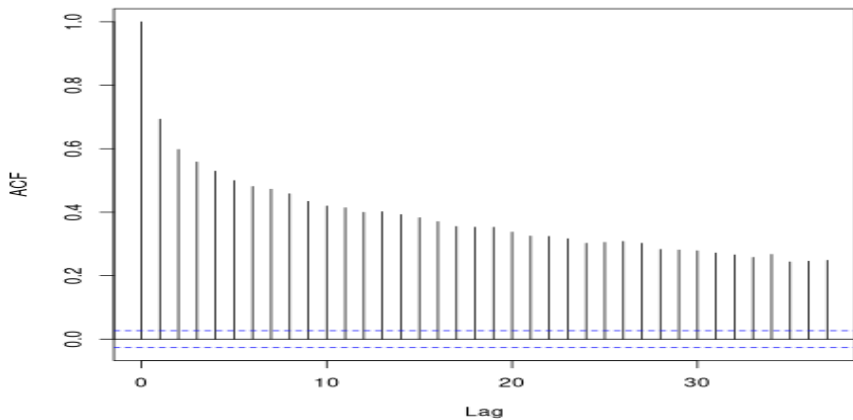
bls. 86

*The correlogram of the residual series for the AR(4) model fitted to the annual global temperature series. The correlogram is approximately white noise so that, in the absence of further information, a simple stochastic model can 'explain' the correlation and trends in the series.*

# Árhringir út trjám

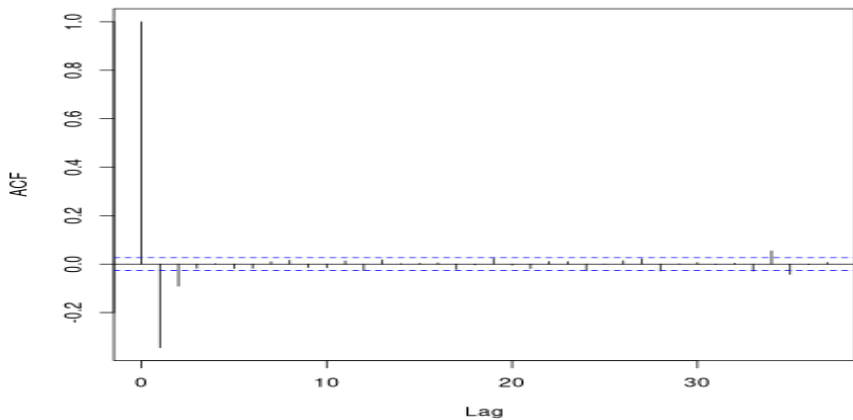


### Series camp





### Series diff(camp)



# Nokkrar nýjar heimildir

- Hunt, Peiris & Weber (2022), höfundur gamma(R-forrit), matsaðferðafræði.
- Dissanayake, Peiris & Proietti (2018) yfirlit um fractional diffrun.
- Toulemonde, Riberau & Naveau (2015) um extreme-value-theory.

# Nokkrar skammstafanir

MMAR	Multifractal Model of Asset Returns
ARCH	Autoregressive Conditional Heteroscedasticity
GARCH	Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity
EGARCH	Exponential Generalized Autoregressive Conditionally Heteroscedasticity
FIGARCH	Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditionally Heteroscedasticity
MRS-GARCH	Markov Regime Switching Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity
EMH	Efficient Market Hypothesis
FMH	Fractal Market Hypothesis
ARFIMA	Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average
MF-DFA	Multifractal Detrended Fluctuation Analysis
FIGARCH	Fractionally Integrated Exponential Generalized Autoregressive Conditionally Heteroskedasticity
FIGARCH-M	Fractionally Integrated Exponential Generalized Autoregressive Conditionally Heteroskedastic-in-mean
CAC40	Cotation Assistée en Continu 40

# Norður- og suðurhvel ekki eins, Yasmeen (2019)

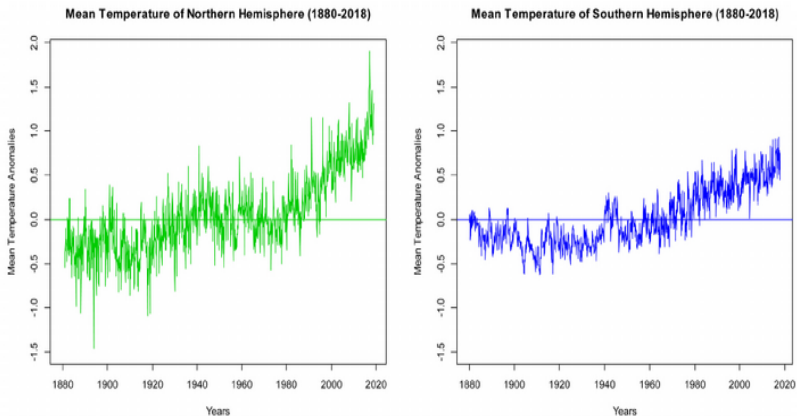


Figure 3. Mean monthly temperature anomalies of northern hemisphere (green color) and southern hemisphere (blue color) during 1880-2018. The zero line represents the long-term average temperature during 1901-2000.

TAKK FYRIR

Armstrong, J. S., Green, K. C., & Soon, W. (2011). Research on forecasting for the manmade global warming alarm. *Energy & Environment*, 22(8), 1091–1104.

Baillie, R. & Chung, S.-K. (2002). Modeling and forecasting from trend-stationary long memory models with applications to climatology. *International Journal of Forecasting*, 18, 215–226.

Bloomfield, P. (1992). Trends in global temperature. *Climatic Change*, 21, 1–16.

Box, G. E. P. & Jenkins, G. M. (1976). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Holden Day, San Fransisco.

Chan, N. H. & Palma, W. (1998). State space modeling of long-memory processes. *The Annals of Statistics*, 26(2), 719–740.

Comte, F. & Renault, E. (1996). Long memory continuous time models. *Journal of Econometrics*, 73(1), 101–149.

Cowpertwait, P. & Metcalve, A. (2009). *Introductory Time Series with R*. Springer.

Dagsvik, J. K., Fortuna, M., & Moen, S. H. (2020). How does temperature vary over time?: evidence on the stationary and fractal nature of

temperature fluctuations. *Journal of the Royal Statistical Society Series A*, 183(3), 883–908.

Dissanayake, G. S., Peiris, M. S., & Proietti, T. (2018). Fractionally differenced gegenbauer processes with long memory: A review. *Statistical Science*, 33(3), 413–426.

Hunt, R., Peiris, S., & Weber, N. (2022). Estimation methods for stationary gegenbauer processes. *Statistical Papers*.

Hurst, H. E. (1951). Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116, 770–799.

Mills, T. C. (2016). Statistical forecasting: How fast will future warming be? GWPF Technical Paper 1, The Global Warming Policy Foundation.

Toulemonde, G., Riberau, P., & Naveau, P. (2015). *Applications of Extreme Value Theory to Environmental Data Analysis*, chapter 2, (pp. 7–21). American Geophysical Union (AGU).

Trewin, D. (2008). How reliable are climate change projections – a statistician's perspective. In *Statistics, Knowledge and Policy 2007 Measuring and Fostering the Progress of Societies*.

Yasmeen, F. (2019). Measuring global warming: Global and hemisphere mean temperature anomalies predictions using sliced functional time series (sfts) model. *Open Journal of Applied Sciences*, 09, 316–334.

Yule, G. (1926). Why do we sometimes get nonsense-correlations between time-series? a study in sampling and the nature of time-series. *Journal of the Royal Statistical Society*, 89(1), 1–63.