Fjármálatíðindi 51. árgangur fyrra hefti 2004, bls. 55-75

Nóbelsverðlaunin í hagfræði árið 2003:

Tímaraðagreining: Samþætting og eiginfylgni í skilyrtu flökti

Grein af vef Nóbelsstofnunarinnar í þýðingu Þórarins G. Péturssonar

Ágrip: Við próf á hagfræðikenningum er notast við tímaraðir, þ.e. haggögn sem mæld eru yfir tíma. Meðal slíkra tímaraða má nefna landsframleiðslu, verðlag, vexti, hlutabréfaverð o.s.frv. Á níunda áratug síðustu aldar þróuðu Nóbelsverðlaunahafarnir Clive Granger og Robert Engle nýjar tölfræðiaðferðir til að meðhöndla tvo af mikilvægustu eiginleikum slíkra tímaraða, það að tímaraðir virðast oft vera ósístæðar, þ.e. þær virðast ekki hafa tilhneigingu til að sveiflast í kringum fast meðaltal, og að breytileiki þeirra virðist ekki vera fastur yfir tíma. Í þessari grein er fjallað um framlag þeirra og þau varanlegu áhrif sem það hefur haft á það hvernig hagnýtar tölfræðirannsóknir í hagfræði og fjármálum eru framkvæmdar.

Lykilorð: Tímaraðagreining, hagmælingar, samþætting, flökt.

JEL: C22, C32, C5.

1. Inngangur

Tölfræðilegar rannsóknir í þjóðhagfræði og fjármálum byggjast að stórum hluta á tímaröðum. Venja er í slíkum rannsóknum, sem upphaflega má rekja til rannsókna Nóbelsverðlaunahafans Trygve Haavelmo, að hugsa um haggögn sem útkomu úr slembiferli. Þetta gerir rannsakandanum kleift að notast við tölfræðilega ályktanafræði við byggingu og prófun á samböndum sem lýsa samspili haggagna. Verðlaunahafar þessa árs hafa dýpkað skilning okkar á tveimur grundvallareiginleikum fjölda haggagna – ósístæðni (e. *non-stationarity*) og tímaháð flökt (e. *time-varying volatility*) – sem hefur leitt til fjölda hagnýtra rannsókna.

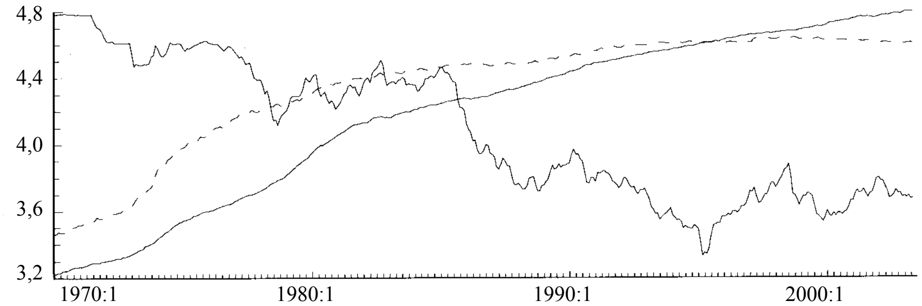
Ósístæðni er algengur eiginleiki þjóðhags- og fjármálalegra gagna og þýðir að hagstærðin hafi enga augljósa tilhneigingu til að leita í fast meðaltal eða í átt að leitniferli sínum. Mynd 1.1 er dæmi um þetta en hún sýnir gengisvísitölu jens gagnvart dollar og árstíðarleiðréttar neysluverðsvísitölur í Bandaríkjunum og Japan. Engin þessara tímaraða virðist sístæð, þ.e. leita í átt að föstu meðaltali eða leitni (en þá er röðin sögð vera sístæð í kringum leitniferil). Einnig má sjá að sveiflur í verðvísitölunum eru mun minni en í gengisvísitölunni. Þessa eiginleika er einnig að finna í öðrum hagstærðum, eins og landsframleiðslu, einkaneyslu, atvinnu og eignaverði. Því virðist rétt að gera ráð fyrir að þessar raðir séu ósístæðir ferlar og innihaldi slembileitniferil (e. *stochastic trend*).

Mikilvægt markmið tölfræðilegra rannsókna í þjóðhagfræði er að prófa tilgátur og meta hagfræðileg sambönd. Þær tölfræðiaðferðir sem notaðar voru allt fram undir seinni hluta níunda áratugar síðustu aldar við mat og prófun á margvíðum haglíkönum byggðust á þeirri fræðilegu grunnforsendu að verið væri að vinna með sístæð haggögn. Vandamálið var að tölfræðilegar ályktanir sem byggjast á sístæðum gögnum eiga ekki lengur við þegar verið er að vinna með ósístæðar tímaraðir.

Skilningur á þessum vanda var ekki mikill meðal fræðimanna fyrir þremur áratugum. Þetta hefur breyst og má þakka Clive Granger það.

Mynd 1.1

Gengisvísitala japansks jens gagnvart Bandaríkjadal (fallandi heil lína, lógariþmaskali), árstíðarleiðrétt neysluverðsvísitala í Bandaríkjunum (hækkandi heil lína, lógariþmaskali) og árstíðarleiðrétt neysluverðsvísitala í Japan (hækkandi brotin lína, lógariþmaskali), 1970:1-2003:5, mánaðarleg gögn



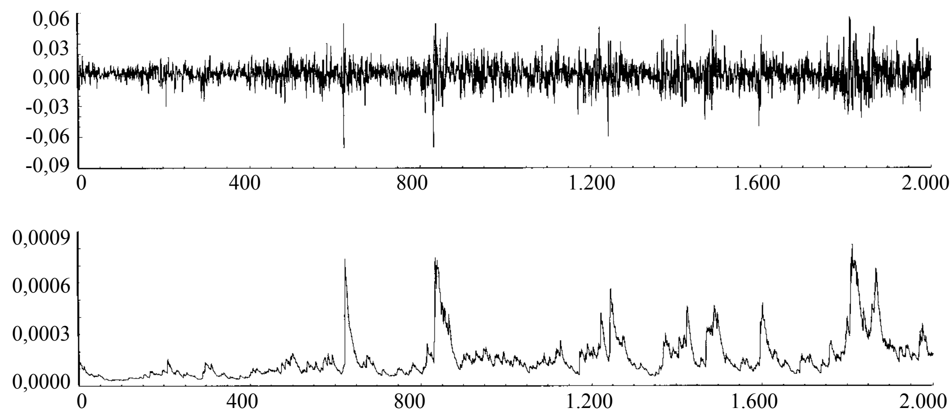
Hann hefur sýnt hvernig setja má saman þjóðhagslíkön sem innihalda ósístæðar stærðir, þannig að þau standi á tölfræðilega traustum grunni og hafi einnig hagræna merkingu. Rannsóknir hans hafa einnig lagt grunninn að því hvernig meta má margvísleg sambönd milli fjölda hagstærða. Þetta gerði hann með því að skilgreina hugtakið samþættingu (e. *cointegration*) milli hagstærða sem hefur breytt því í grundvallaratriðum hvernig tölfræðileg þjóðhagslíkön eru byggð upp í dag.

Annað mikilvægt einkenni hagrænna tímaraða, sem er sérstaklega algengt meðal fjármálagagna, er að flökt þeirra er breytilegt yfir tíma. Sem dæmi má taka daglega ávöxtun hlutabréfa eða gengis gjaldmiðla, eins og mynd 1.2 sýnir. Efri hluti myndarinnar sýnir daglega breytingu, þ.e. ávöxtun, gengis jens gagnvart dollar. Neðri hluti hennar sýnir tuttugu daga (fjögurra viðskiptavikna) hreyfanlegt meðaltal kvaðratávöxtunar en út frá honum má greinilega sjá hvernig tímabil mikils og lítils flökts skiptast á.

Flökt ávöxtunar skiptir höfuðmáli í fjármálahagfræði og greiningu á fjármálamörkuðum. Verð hlutabréfa og annarra fjáreigna ræðst af væntu flökti (samdreifniuppbyggingu) ávöxtunar. Bank-

Mynd 1.2

Dagleg ávöxtun gengis jens gagnvart Bandaríkjadal ásamt 20 daga hreyfanlegu meðaltali daglegrar kvaðratávöxtunar, 1986-1995



ar og önnur fjármálafyrirtæki leggja mat á flökt fjármálaraða í reglubundnu eftirliti á eigin áhættu. Fram undir miðjan níunda áratug síðustu aldar notuðu fræðimenn og sérfræðingar á fjármálamörkuðum líkön þar sem gert var ráð fyrir að flökt breyttist ekki yfir tíma. Eins og mynd 1.2 ber með sér getur flökt tekið töluverðum breytingum. Tímabil mikils flökts ávöxtunar skiptast á við tímabil lítils flökts. Bygging líkana af flökti og flöktspár eru því afar mikilvæg fyrir fjármálamarkaði.

Rannsóknir á líkönum af flökti má rekja til Roberts Engles sem skilgreindi fyrstur hugtakið eiginfylgni í skilyrtu flökti (e. *autoregressive conditional heteroscedasticity; ARCH*) snemma á níunda áratug síðustu aldar. Frá þeim tíma hafa líkön sem byggð hafa verið á þessari hugmynd orðið að grunntæki greiningaraðila á fjármálamörkuðum, bankamanna og sjóðsstjóra um allan heim. Á síðustu tveimur áratugum hefur Robert Engle verið brautryðjandi í rannsóknum á flöktlíkönum og hefur átt nokkrar af grunnrannsóknum þessa fræðasviðs.

2. Samþætting hagstærða

Hagfræðingar byggja tímaraðalíkön til að prófa hagfræðikenningar, til að spá og gera hagstjórnartilraunir. Slík líkön eru byggð og notuð af hagfræðingum í háskólum, rannsóknarstofnunum og seðlabönkum. Löng hefð er fyrir notkun stórra haglíkana sem samanstanda af hundruðum jafna og stærða. Á síðustu árum hefur notkun tiltölulega lítilla líkana sem innihalda aðeins nokkrar jöfnur orðið algengari. Þar sem eðlilegra er að meðhöndla margar þeirra tímaraða sem notaðar eru í líkönin sem ósístæðar, kallar notkun þeirra á nýja nálgun og annars konar grunn fyrir tölfræðilegar ályktanir en þann sem mótaður var fyrir sístæð gögn.

Í þessum kafla verður fjallað um framlag Clive Grangers en afrakstur þess var hugtakið samþætting og notkun þess á hagræn gögn. Við byrjum á því að skilgreina hugtakið samþættingu og þann tölfræðigrunn sem tengist því, þ.á m. hina svokölluðu setningu Grangers (e. *Granger representation theorem*). Á eftir fylgir lýsing á tveggja þrepa aðferð hans við prófun á samþættingarsamböndum og mat á jöfnukerfum með samþættum stærðum. Fjöldi endurbóta á grunnhugmyndinni er nefndur og að lokum er fjallað um nýtingu hugtaksins í ýmsum rannsóknum. Tölfræðirannsóknir á kenningunni um kaupmáttarjafnvægi milli landa (e. *purchasing power parity; PPP*) eru notaðar til að skýra hvernig samþættingarhugtakið breytir ekki aðeins gerð grunnrannsókna heldur einnig hvernig það gefur nýja sýn á ýmis hagræn viðfangsefni.

2.1. Samþætting: skilgreining

Eins og mynd 1.1 ber með sér er við hæfi að gera ráð fyrir að gögnin verði til út frá ósístæðum slembiferli. Lengi vel voru slík gögn notuð beint í venjulegri aðfallsgreiningu (e. *regression*) án þess að fyrir lægi nægilegur skilningur á því að tilgátur um stika slíkra jafna gætu leitt til kolrangra ályktana. Það var ekki fyrr en Clive Granger, ásamt Paul Newbold, sýndu fram á það í víðfrægri grein (Granger og Newbold, 1974) að slík aðfallsgreining gæti oft gefið til kynna tölfræðilega marktækt samband milli stærða, þótt ekkert slíkt væri í raun fyrir hendi. Granger og Newbold sýndu fram á þetta með því að búa til óháða og ósístæða slembiferla, nánar tiltekið tvo ráfferla (e. *random walk*).[1] Aðfallsgreining milli þessara tveggja óháðu ráfferla gaf mun hærra t-gildi á teygnistikann undir núll-tilgátunni að hið sanna gildi hans væri núll en hefðbundin tölfræði fyrir sístæðar stærðir gaf til kynna að væri mögulegt. Á sama tíma var greinilega sterk jákvæð eiginfylgni í afgangslið aðfallsgreiningarinnar.[2]

Þessar niðurstöður gefa til kynna að mörg hagræn sambönd sem notuð höfðu verið í haglíkönum og virtust vera tölfræðilega marktæk við

1. Gerum ráð fyrir að $\{\varepsilon_\tau\}$, $\tau = 0, 1, 2, ...$, sé runa óháðra slembistærða með meðaltal núll og breytileika (e. *variance*) σ^2 og skilgreinum $\xi_\tau = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + ... + \varepsilon_\tau$. Runan $\{\xi_\tau\}$, $\tau = 0, 1, 2, ...$, er þá skilgreind sem ráfferill (án leitni).
2. Niðurstöður Grangers og Newbolds (1974) eru fengnar með tölfræðilegum hermunum. Viðeigandi markgildisfræði (e. *asymptotic theory*) fyrir tilraun þeirra var leidd út meira en áratug síðar af Phillips (1986). Ítarlegt yfirlit yfir þróun þessara fræða er að finna í Granger (2001).

fyrstu sýn voru í raun það sem kallað er delluaðhvarf (e. *spurious regression*). Þessar rannsóknir mynduðu grunn rannsóknaráætlunar Grangers við að þróa aðferðir sem byggðust á raunhæfari og gagnlegri tölfræðilegum líkönum.

Tölfræðingar sem vinna við tímaraðir bentu á einfalda lausn á þessum vanda. Ef tímaröðunum er einfaldlega umbreytt í fyrsta mismun og hann notaður í stað stærðanna sjálfra við mat á hinum hagrænu samböndum er komist framhjá hinu tölfræðilega vandamáli sem rekja má til ósístæðni gagnanna þar sem fyrsti mismunur stærðanna er yfirleitt sístæður jafnvel þótt frumgögnin séu það ekki. Hagrænar fræðikenningar eru hins vegar yfirleitt settar fram fyrir frumstærðirnar en ekki vöxt þeirra. Til dæmis segja kenningar um ákvörðun einkaneyslu til um samband einkaneyslu, ráðstöfunartekna, auðs og annarra hagstærða – en ekki prósentubreytingu þessara stærða. Tölfræðilíkan sem byggist á prósentuvexti þessara stærða væri því ekki að nýta til fullnustu hina undirliggjandi fræðikenningu.

Annar möguleiki væri að hreinsa burt leitnihegðun gagnanna og skilgreina hið tölfræðilega líkan fyrir frávik stærðanna frá leitniferli sínum. Vandamálið við þessa aðferð er hins vegar að þá er í raun gert ráð fyrir að leitniferlar stærðanna séu óháðir hver öðrum, þ.e. að hver stærð fylgi einföldum línulegum tímaferli sem sé óháður leitniferlum annarra stærða. Þessi forsenda virðist ekki raunhæf þar sem langtímaeiginleikar slíks líkans eru ákaflega sérkennilegir. Það má vera að kvik (e. *dynamic*) tölfræðilíkön sem byggðust á gögnum þar sem væri búið að taka burt línulegan leitniferil geti lýst skammtímasambandi gagnanna en þau mundu ekki henta til að lýsa langtímasambandi þeirra. Það sama á við um líkön þar sem eingöngu væri notast við fyrsta mismun gagnanna.

Lausn Grangers má lýsa með eftirfarandi aðfallsjöfnu

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t, \tag{2.1}$$

þar sem y_t er háða stærðin, x_t er óháða stærðin og $\{\varepsilon_t\}$ er hvítt suð (e. *white noise*) með meðaltal jafnt núlli. Granger (1981) taldi að til þess að þessi jafna hefði einhverja hagræna merkingu þyrfti hermun út frá ytri stærðinni að skýra helstu eiginleika háðu stærðarinnar. Ef t.d. y_t inniheldur árstíðarsveiflu, þarf x_t einnig að innihalda árstíðarsveiflu til að ε_t sé hvítt suð. Til að þróa þessa hugsun enn frekar skilgreindi Granger hugtakið þáttunargráðu (e. *order of integration*) tímaraðar. Ef hægt er að gera stærðina z_t nokkurn veginn sístæða með því að taka mismun hennar d sinnum er stærðin sögð þáttuð af gráðunni d, eða I(d). Veik-sístæð (e. *weakly stationary*) stærð er því I(0). Fjölda þjóðhagsstærða virðist mega meðhöndla sem I(1), $z_t \sim$ I(1) og því $\Delta z_t \sim$ I(0). Takið eftir að I(1)-stærðir yfirgnæfa I(0)-stærðir, þ.e. sveiflur í I(1)-stærðinni munu yfirgnæfa sveiflur í I(0)-stærðinni í línulegu sambandi þeirra. Ef t.d. $z_t \sim$ I(1) og $w_t \sim$ I(0) er $z_t + w_t \sim$ I(1).

Ef gert er ráð fyrir að bæði y_t og x_t í jöfnu (2.1) séu I(1) má almennt gera ráð fyrir að $y_t - \beta x_t$ sé það einnig. Á þessu er þó ein mikilvæg undantekning. Ef $\varepsilon_t \sim$ I(0) hlýtur $y_t - \beta x_t$ að vera það einnig þannig að þetta línulega samband hefur sömu eiginleika og I(0)-stærð. Aðeins er eitt slíkt samband til þannig að stikinn β er einstakur.[3] Í þessu sértilfelli eru stærðirnar y_t og x_t sagðar vera *samþættar*. Almennt séð getum við haft línulegt samband fjölda I(1)-stærða sem er I(0) og eru stærðirnar þá sagðar samþættar. Þetta hugtak, sem Granger (1981) skilgreindi fyrstur manna, hefur reynst gífurlega mikilvægt fyrir rannsóknir á ósístæðum hagrænum tímaröðum. Einnig má útvíkka hugtakið þannig að við höfum I(d)-stærð þar sem d er ekki heil tala og er þá talað um að stærðirnar séu samþættar ef línulegt samband þeirra er I($d - d_0$), þar sem $d_0 > 0$.

3. Hægt er að sýna fram á að β sé einstakur með eftirfarandi hætti: Gerum ráð fyrir að til séu tvö samþættingarsambönd milli I(1)-stærðanna y_t og x_t

$$y_t = \beta_j x_t + \varepsilon_{jt}, j = 1, 2, \beta_2 \neq \beta_1.$$

Með því að draga seinna sambandið frá því fyrra fæst

$$(\beta_1 - \beta_2)x_t = \varepsilon_{1t} - \varepsilon_{2t}.$$

Stærðin vinstra megin við jafnaðarmerkið er I(1) en stærðin hægra megin er I(0) þar sem hún er mismunur tveggja I(0)-stærða. Þetta fær ekki staðist nema $\beta_2 = \beta_1$ en þá gildir einnig að $\varepsilon_{1t} = \varepsilon_{2t}$.

Mikilvægi samþættingar fyrir þróun tölfræðilíkana fyrir ósístæðar stærðir má einnig sjá út frá setningu Grangers sem fyrst var sett fram í Granger og Weiss (1983). Eftirfarandi dæmi af tvívíðu eiginfylgnikerfi af gráðunni p má nota til að skýra hana út

$$x_t = \sum_{j=1}^{p} \gamma_{1j} x_{t-j} + \sum_{j=1}^{p} \delta_{1j} y_{t-j} + \varepsilon_{1t}$$

$$y_t = \sum_{j=1}^{p} \gamma_{2j} x_{t-j} + \sum_{j=1}^{p} \delta_{2j} y_{t-j} + \varepsilon_{2t},$$

þar sem x_t og y_t eru samþættar I(1)-stærðir og ε_{1t} og ε_{2t} eru hvítt suð. Samkvæmt setningu Grangers má endurrita þetta jöfnukerfi sem

$$\text{(2.2)} \qquad \Delta x_t = \alpha_1 (y_{t-1} - \beta x_{t-1}) + \sum_{j=1}^{p-1} \gamma_{1j}^{*} \Delta x_{t-j} + \sum_{j=1}^{p-1} \delta_{1j}^{*} \Delta y_{t-j} + \varepsilon_{1t}$$

$$\Delta y_t = \alpha_2 (y_{t-1} - \beta x_{t-1}) + \sum_{j=1}^{p-1} \gamma_{2j}^{*} \Delta x_{t-j} + \sum_{j=1}^{p-1} \delta_{2j}^{*} \Delta y_{t-j} + \varepsilon_{2t},$$

þar sem a.m.k. annar stikanna α_1 og α_2 er frábrugðinn núlli. Báðar jöfnurnar eru sagðar „í jafnvægi“ (e. *balanced*) þar sem allar stærðir þeirra eru þáttaðar af sömu gráðu þar sem $y_t - \beta x_t \sim \mathrm{I}(0)$.

Ef við gerum ráð fyrir að $y_t - \beta x_t = 0$ skilgreini hið kvika jafnvægi milli þessara tveggja hagstærða, má skilgreina $y_t - \beta x_t$ sem frávik frá þessu jafnvægi. Stikarnir α_1 og α_2 endurspegla því tilhneigingu kerfisins til að leita aftur í jafnvægi, þ.e. „villuleiðréttinguna“. Því er jöfnukerfið (2.2) jafnan sagt á villuleiðréttingarformi (e. *error-correction form*). Jöfnukerfið er því almennt statt í burtu frá jafnvægisástandi sínu á hverjum tíma en hefur innbyggða krafta sem toga það aftur í átt að jafnvægisástandi sínu.

Í raun er því ekki hægt að skilgreina hagrænt tölfræðilíkan án þess að þekkja af hvaða gráðu hin undirliggjandi gögn eru þáttuð. Próf fyrir einingarrót (ósístæðni) voru þróuð af Fuller (1976), Dickey og Fuller (1979, 1981), Phillips og Perron (1988) og öðrum.[4] Þegar þessi próf eru notuð á þær þrjár stærðir sem mynd 1.1 sýnir fæst að núlltilgátunni að raðirnar innihaldi einingarrót verður ekki hafnað. Einingarrót er hins vegar hafnað fyrir fyrsta mismun stærðanna. Stærðirnar virðist því mega meðhöndla sem I(1)-stærðir.

Rétt er að taka það fram að línulegt samband ósístæðra stærða hafði verið notað í rannsóknum áður en Granger setti fram sínar niðurstöður. Fyrst er hægt að nefna Phillips (1957), sem bjó til hugtakið „villuleiðrétting“, og Sargan (1964). Hin velþekkta neyslurannsókn Davidsons, Hendrys, Srbas og Yeos (1978), hið svokallaða DHSY-líkan, kynnti þessar hugmyndir meðal hagfræðinga. Þessi rannsókn byggðist á ársfjórðungslegum gögnum frá Bretlandi og í matsjöfnunni kemur fyrir stærðin $c_t - y_t$, þar sem c_t er lógariþmi einkaneyslu óvaranlegra vara og y_t lógariþmi tekna, sem gefur villuleiðréttingarlið jöfnunnar. Höfundarnir ígrunduðu hins vegar ekki hvaða áhrif slík viðbótarstærð hefði á tölfræðilega eiginleika líkansins.[5]

2.2. Samþætting: mat og próf

Hugtakið samþætting hefði ekki reynst hafa mikla hagnýta eiginleika ef ekki hefði komið til þróun tölfræðilegrar undirstöðu þess hvernig prófa megi fyrir samþættingu og meta samþættingarsambandið. Granger og Robert Engle þróuðu saman grunntæknina í klassískri og afar áhrifamikilli grein sinni, Engle og Granger (1987), þar sem fræðilegar undirstöður samþættingar eru teknar saman og endurbættar. Í greininni má m.a. finna ítarlega sönnun á áðurnefndri setningu Grangers.

Engle og Granger íhuga hvernig prófa megi núll-tilgátu um að engin samþætting sé á milli I(1)-stærða. Þeir meta stika kyrrs (e. *static*) sambands stærðanna (eins og jöfnu 2.1) með aðferð minnstu kvaðrata (e. *ordinary least squares; OLS*) og nota ofangreind einingarrótarpróf á afgangslið aðfallsgreiningarinnar. Það að núlltilgátunni um einingarrót í afgangsliðnum er

4. Með því að taka fyrsta mismun af stærð með einingarrót er einingarrótin fjarlægð.

5. Umfjöllun um DHSY-líkanið þar sem notast er við samþættingargreiningu er hægt að finna í Hendry, Muellbauer og Murphy (1990).

hafnað bendir til þess að samþættingarsamband sé á milli stærðanna. Að lokum bera þeir saman tölfræðilega eiginleika nokkurra slíkra prófa.

Nýlega hafa birst rannsóknir sem hafa gert það kleift að prófa núll-tilgátuna að línulegt samband I(1)-stærða sé samþætt (þ.e. að afgangsliðurinn sé sístæður undir núll-tilgátunni) á móti gagntilgátunni að það sé ósístætt (þ.e. að afgangsliðurinn sé ósístæður). Slík próf hafa verið þróuð af Shin (1994) og eru byggð á þekktu sístæðniprófi Kwiatowskis, Phillips, Schmidts og Shins (1992), auk rannsókna Saikkonens og Luukkonens (1993), Xiaos og Phillips (2002) og annarra.

Annað mikilvægt framlag Engles og Grangers (1987) er tveggja þrepa matsaðferð sem hægt er að nota við mat á margvíðum tímaraðalíkönum (e. *vector autoregressions; VAR*) með samþættum stærðum. Tökum sem dæmi VAR-líkan af gráðunni p

$$\Delta \mathbf{x}_t = \boldsymbol{\alpha\beta}'\mathbf{x}_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \boldsymbol{\Gamma}_j \Delta \mathbf{x}_{t-j} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{2.3}$$

þar sem $\mathbf{x}_t$ er $n \times 1$ vektor af I(1)-stærðum, $\boldsymbol{\alpha\beta}'$ er $n \times n$ fylki þar sem $n \times r$ fylkin $\boldsymbol{\alpha}$ og $\boldsymbol{\beta}$ hafa raðtöluna (e. *rank*) r, $\boldsymbol{\Gamma}_j$, $j = 1, ..., p - 1$, er $n \times n$ stikafylki og ε_t er $n \times 1$ vektor af afgangsliðum sem eru hvítt suð með breytileikafylki (e. *variance-covariance matrix*) sem er jákvætt-ákveðið (e. *positive definite*). Ef $0 < r < n$ eru stærðirnar í $\mathbf{x}_t$ samþættar þar sem fjöldi samþættingarsambanda er r og gefin eru sem $\boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_t$. Stock (1987) sýnir jafnframt fram á að við ákveðin skilyrði er OLS-metill $\boldsymbol{\beta}$ samkvæmur (e. *consistent*) og stefnir í átt að hinu sanna gildi með hraðanum $1/T$ (þar sem T er fjöldi mælinga). Af þessum sökum er metillinn sagður ofursamkvæmur (e. *super-consistent*). Að fenginni þessari niðurstöðu sýna Engle og Granger fram á að metill sennilegustu gilda (e. *maximum likelihood estimator; ML*) fyrir hina stika líkansins, $\boldsymbol{\alpha}$ og $\boldsymbol{\Gamma}_j$, $j = 1, ..., p - 1$ (þar sem OLS-metill $\boldsymbol{\beta}$ er settur í stað hins raunverulega gildis) hefur sömu markgildiseiginleika (e. *asymptotic properties*) og metillinn sem fæst með því að nota hið raunverulega gildi $\boldsymbol{\beta}$.

Ef stærðirnar í $\mathbf{x}_t$ eru samþættar er því hægt að meta stikana í (2.3) í tveimur þrepum. Byrjað er að meta stikana í $\boldsymbol{\beta}$, eða nánar tiltekið það sem kallað er sístæðnirúmið (e. *cointegrating space*), þ.e. stikana í $\boldsymbol{\beta}$ upp að fastri skölun, með aðferð minnstu kvaðrata. Síðan er matið á $\boldsymbol{\beta}$ tekið sem gefið og aðrir stikar líkansins metnir með ML. Stikarnir í $\boldsymbol{\alpha}$ og $\boldsymbol{\Gamma}_j$, $j = 1, ..., p - 1$, eru samkvæmir og stefna að normaldreifingu í markgildi. Tilgátur um þessa stika er því hægt að prófa með hefðbundinni ályktanafræði.

Í kjölfar rannsóknar Engles og Grangers (1987) birtist fjöldi hagnýtra rannsókna sem byggjast á niðurstöðum þeirra. Rannsókn þeirra jók einnig á vinsældir VAR-líkana sem höfðu verið þróuð af Sims (1980) sem valmöguleiki við mat á margvíðum jöfnukerfum. Sims hafði lagt áherslu á notkun ótakmarkaðra VAR-líkana við mat á hagrænum samböndum þar sem ekki væri byggt á ónauðsynlegum forsendum. VAR-líkön með samþættingu byggjast hins vegar oft á hugmyndum um langtímajafnvægi sem styðjast við hagfræðikenningar og skilgreint er sem vektorinn $\boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_{t-1}$ í (2.3). Skammtímaþróun stærðanna endurspeglast í stikunum í $\boldsymbol{\Gamma}_j$, $j = 1, ..., p - 1$, og eru þessir stikar metnir án skilyrða frá hagfræðikenningum. Það á jafnframt við aðlögunarstikana í $\boldsymbol{\alpha}$ sem lýsa framlagi frávika frá langtímajafnvæginu til aðlögunar að því.

Tveggja þrepa aðferð Engles og Grangers (1987) er tímamótaframlag til byggingar á tölfræðilegum haglíkönum sem byggjast á ósístæðum gögnum. Meðal síðari framlaga hafa rannsóknir Johansens (1988, 1991) sérstaklega mikla þýðingu. Johansen þróaði ML-metil $\boldsymbol{\beta}$, eða nánar tiltekið rúmið sem hinir r samþættingarvektorar í (2.3) ná yfir með því að nota aðferð minnkandi raðtölu (e. *reduced rank regression*).[6] Hann þróaði einnig aðferð til að ákvarða fjölda samþættingarsambanda. Hægt er að hugsa um aðferð Johansens sem annarrar kynslóðar aðferðarfræði við greiningu á samþættingarsamböndum í þeim skilningi að aðferð hans byggist beint á ML-metlunum í stað þess að vera byggð að hluta á OLS-metlum.

6. Í reynd er vektorinn $\boldsymbol{\beta}$ skalaður þannig að eitt stak hans er sett jafnt einum þannig að stök $\boldsymbol{\beta}$-vektorsins, ásamt stökum $\boldsymbol{\alpha}$-vektorsins, eru einstök.

2.3. Frekari endurbætur

Granger og Engle, ásamt ýmsum meðhöfundum, hafa einnig útvíkkað samþættingarhugtakið þannig að það nái til tímaraða sem einkennast af árstíðarsveiflu. Í hagnýtum rannsóknum er oft unnið með haggögn sem innihalda sterka árstíðarsveiflu og er hún þá oft fjarlægð með því að taka árstíðarmismun. Ef t.d. x_t er ósístæð tímaröð mæld á ársfjórðungstíðni, getur árstíðarmismunurinn $\Delta_4 x_t = x_t - x_{t-4}$ verið I(0). Ef tvær ósístæðar stærðir sem innihalda árstíðarsveiflu, y_t og x_t, verða I(0) með því að taka árstíðarmismun þeirra og þar að auki er fyrir hendi línulegt samband á milli þeirra, $y_t - \beta x_t$, sem er einnig I(0) eru þessar stærðir sagðar vera árstíðarsamþættar (e. *seasonally cointegrated*). Eiginleikar slíkra raða voru fyrst rannsakaðir af Hylleberg, Engle, Granger og Yoo (1990).

Granger og Lee (1990) skilgreina hugtakið margsamþættingu (e. *multicointegration*), sem getur verið hentugt við rannsóknir á sambandi stofn- og flæðistærða. Gerum ráð fyrir að x_t og y_t séu samþættar. Þá eru uppsöfnuð frávik frá samþættingarsambandinu $y_t - \beta x_t = 0$ I(1)-stærð. Ef þessi nýja stærð er síðan samþætt við eina af upprunalegu stærðunum, hvort sem það er x_t eða y_t, er sagt að margsamþættingarsamband sé á milli þessara stærða.[7]

Í mörgum tilvikum geta frávik frá jafnvægisástandi stafað af viðskipta- og upplýsingakostnaði. Granger og Swanson (1996) sýna hvernig taka má tillit til slíks kostnaðar í líkönum með samþættingarsamböndum og hvernig það getur leitt til ólínulegra villuleiðréttingarlíkana. Aðlögunarkostnaður er hins vegar oft þess eðlis að aðlögun að jafnvægi á sér ekki stað fyrr en frávikið frá jafnvægi eða markmiði nær ákveðinni stærð. Granger og Swanson sýna hvernig hægt er að meðhöndla slíka aðlögun, sem t.d. er hægt að finna í (S, s)-líkönum af birgðaaðlögun og verðlagningarlíkönum með listakostnaði (e. *menu costs*), í líkönum með samþættum stærðum. Tölfræðin fyrir slík samþættingarlíkön var fyrst þróuð af Balke og Fomby (1997), sem kölluðu slík sambönd þröskuldarsamþættingu (e. *threshold cointegration*). Nýlegar rannsóknir á þessu sviði má finna í Lo og Zivot (2001).

2.4. Dæmi um notkun

Samþætting er orðin hluti hefðbundinnar aðferðarfræði í hagnýtum hagrannsóknum á fjölda sviða hagfræðinnar þar sem langtímasambönd hafa áhrif á þróun stærðanna í dag. Þannig ráðast neysluútgjöld í dag af væntum framtíðartekjum, langtímavextir í dag ráðast af væntum skammtímavöxtum o.s.frv. Í slíkum tilfellum má leiða samþættingarsamböndin út frá kenningum hagfræðinnar og – sé í raun um samþættingarsamband að ræða – bæta því við hið tölfræðilega líkan.

Samband auðs og neyslu er dæmi um það hvernig samspil fræðikenninga og hagnýtra rannsókna getur breytt sýn okkar á hagrænni hegðun. Hin hefðbundna sýn í mörgum kennslubókum er sú að aukinn auður leiði til aukinnar neyslu nokkurn veginn í hlutfalli við raunvaxtarstigið. Þetta samband virðist t.d. í samræmi við ævitekjukenninguna (e. *life-cycle hypothesis*). Sé þessi kenning rétt ættu sveiflur í hlutabréfa- og húsnæðisverði að hafa mikil áhrif á einkaneyslu.

Þessar niðurstöður byggjast hins vegar á niðurstöðum rannsókna sem gera ekki fullnægjandi greinarmun á milli tímabundinna og varanlegra breytinga auðs. Nýleg rannsókn Lettaus og Ludvigsons (2003) sýnir að neysla, launatekjur og auður þurfa að vera samþætt séu einstaklingar bundnir af tímatengdu tekjubandi við ákvörðun neysluútgjalda sinna. Rannsókn þeirra sýnir að þetta er í samræmi við gögnin. Þeir meta einnig villuleiðréttingarlíkan sem gefur til kynna að sveiflur í auði séu að meginhluta tímabundnar og upprunnar á hlutabréfamarkaði. Jafnframt benda niðurstöður þeirra til þess að þessar sveiflur hafi lítil áhrif á einkaneyslu, bæði til skamms og langs tíma.

Meðal annarra vel þekktra rannsókna sem meta samþættingarsambönd sem rekja má beint til hagfræðikenninga má nefna rannsókn Camp-

7. Sem dæmi gæti framleiðsla og sala í atvinnugrein verið I(1) og samþætt þannig að mismunur þessara stærða, þ.e. birgðabreytingar, eru þá I(0)-stærð. Birgðastaðan (þ.e. upphaflegar birgðir auk uppsafnaðra birgðabreytinga) er því I(1). Ef fyrirtækin setja sér markmið um ákveðna birgðastöðu sem hlutfall af sölu, ætti einnig að vera samþættingarsamband milli sölu og birgðastöðu. Framleiðsla og sala verða þá í þessu tilviki margsamþætt.

bells og Shillers (1987) á verðbólum á verðbréfamarkaði, rannsókn Campbells og Shillers (1988), Cochranes (1994) og Lettaus og Ludvigsons (2001) á hversu vel tekst til við að spá hlutabréfaverði, rannsókn Campbells (1987) á því hvort einkaneysla ákvarðist af varanlegum tekjum, rannsókn Kings, Plossers, Stocks og Watsons (1991) á hlutdeild varanlegra framleiðniskella í hagsveiflum í Bandaríkjunum, rannsókn Johansens og Juselius (1990) á peningaeftirspurn og rannsókn Halls, Andersons og Grangers (1992) á tímarófi vaxta.

Greining á sambandi verðlags og gengis er ágætt dæmi til að sýna hvernig samþætting getur breytt hagnýtum rannsóknum og gefið nýja sýn á gamalt viðfangsefni. Fyrir löngu hélt Cassel (1922) því fram að nafngengi gjaldmiðla aðlagist þannig að kaupmáttur verði sá sami milli landa (e. *purchasing power parity; PPP*): verð sambærilegrar vörukörfu verður það sama milli landa, mælt í sömu mynt (dæmi um yfirlitsgreinar er Froot og Rogoff, 1995, og Sarno og Taylor, 2002). Fyrir tvö lönd fæst þá

$$S_t P_t^* = P_t \tag{2.4}$$

þar sem S_t er gengi innlends gjaldmiðils gagnvart þeim erlenda og P_t og P_t^* er verðlag innanlands og erlendis mælt í mynt viðkomandi lands. Raungengið, $S_t P_t^* / P_t$, er því fasti og jafnt einum.

Við fyrstu sýn virðist þessi kenning í fullkomnu ósamræmi við miklar sveiflur í gengi gjaldmiðla á meðan verðbólga er yfirleitt nokkuð stöðug, eins og sjá má á mynd 1.1. Myndin gefur til kynna að á áttunda áratugnum styrktist gengi jens gagnvart dollar á sama tíma og verðbólga var meiri í Japan en Bandaríkjunum, þvert á hina einföldu PPP-kenningu. Þetta hefur ekki verið eins áberandi á síðustu árum en samband sveiflukennds gengis og tiltölulega stöðugs hlutfallslegs verðlags virðist áfram tiltölulega veikt.

Skortur á skýru sambandi gengis og hlutfallslegs verðlags í samræmi við hina einföldu kenningu þarf ekki að koma á óvart. Í fyrsta lagi ákvarðast gengi gjaldmiðla fyrst og fremst af væntingum og fjármagnshreyfingum. Því mun það taka alþjóðaviðskipti tíma að leiðrétta frávik frá PPP: í besta falli virðist PPP-kenningin lýsa langtímasambandi stærðanna. Í öðru lagi eru frávik frá PPP að hluta til vegna þess að ekki eru stunduð alþjóðaviðskipti með allar vörur og því engir augljósir markaðskraftar sem leiðrétta verðmismun slíkra vara milli landa. Í þriðja lagi þarf verðmismunur að vera nægilega mikill til að það borgi sig að eyða honum vegna viðskipta- og flutningskostnaðar.

Rannsóknir á PPP-kenningunni horfðu upphaflega til hinnar einföldu kenningar Cassels (1922). Kenningin var því prófuð með eftirfarandi aðfallsgreiningu

$$s_t = a + b(p_t - p_t^*) + \varepsilon_t \tag{2.5}$$

þar sem lágstafir tákna lógariþma stærðanna í (2.4). Út frá (2.4) má sjá að núll-kenningin samkvæmt PPP samsvarar því að a = 0 og b = 1 í (2.5). Frenkel (1978, 1981), og margir aðrir, hafa metið jöfnu á þessu formi. Jafnan er þá metin með OLS og tilgátan að b = 1 prófuð með hefðbundnum tilgátuprófum. Algengt er að PPP-kenningunni sé sterklega hafnað, a.m.k. ef notast er við gögn frá iðnríkjum eftir endalok Bretton-Woods-fastgengissamstarfsins. Frávikin eru þar að auki ekki í neina sérstaka átt: stikamatið er ýmist stærra eða minna en einn. Þessi próf eru hins vegar meingölluð þar sem þau taka ekki tillit til ósístæðni gagnanna, þ.e. möguleikans á að $\varepsilon_t \sim$ I(1). Þar að auki er ekki hægt að greina á milli (mögulega kröftugra) skammtímafrávika frá PPP og langtímaaðlögunar gengis að jafnvægisgildi sínu með einföldum samböndum eins og (2.5).

Næsta kynslóð rannsókna á PPP-sambandinu meðhöndlaði það sem langtímasamband og kannaði hvort frávik frá PPP væru sístæð. Þetta samsvarar því að prófa hvort a = 0 og b = 1 í (2.5) og kanna hvort afgangsliðurinn, þ.e. raungengi, sé I(0). Þegar slík próf eru notuð á gögn eftir Bretton-Woods-tímabilið kemur í ljós að ekki er hægt að hafna þeirri tilgátu að afgangsliðurinn innihaldi einingarrót, sjá t.d. Meese og Rogoff (1988), sem gefur til kynna að PPP-kenningin virðist ekki einu sinni halda sem langtímasamband. Skýringin sem gefin var í þessum rannsóknum var að gagnaraðirnar væru of stuttar til að niðurstöður einingarrótarprófanna væru áreiðanlegar. Þegar notast var við gögn sem náðu meira en öld aftur í tímann kom einmitt í ljós að hægt var að hafna því að einingarrót væri til staðar í raungenginu, sjá t.d. Frankel (1986).

Lýsi PPP-kenningin langtímasambandi, hversu langan tíma tekur aðlögunin að jafnvæginu? Edison (1987) leitar svara við þessari spurningu með því að nota villuleiðréttingarlíkan með gögn sem ná yfir rúmlega heila öld. Í því tilviki var metna jafnan á eftirfarandi formi

$$\begin{aligned}\Delta s_t &= a + b(s_{t-1} - p_{t-1} - p^*_{t-1}) \\ &\quad + g(\Delta p_{t-1} - \Delta p^*_{t-1}) + \varepsilon_t ,\end{aligned} \tag{2.6}$$

þar sem b mælir aðlögunarhraðann að PPP. Dæmigerð niðurstaða gefur til kynna að helmingslíf frávika frá PPP sé á milli þrjú og sjö ár. Skammtímasveiflur í gengi má því skýra sem sambland skammtímaskella og hægrar aðlögunar að PPP.

Í þessum annarrar kynslóðar rannsóknum er gert ráð fyrir að til sé samþættingarsamband milli s_t, p_t og p_t^* með samþættingarvektorinn $\boldsymbol{\beta} = (1, -1, 1)$ sem fæst út úr einföldu PPP-kenningunni. Raunhæfara virðist hins vegar að gera ráð fyrir mögulegum leitniferli í raungengi þar sem verðlag viðskiptavöru og vöru sem ekki er verslað með á alþjóðlegum mörkuðum getur haft mismunandi leitniferla (hin svo kölluðu Balassa-Samuelson-áhrif).[8] Í slíku tilfelli gæti samþættingarvektorinn verið $\boldsymbol{\beta} = (1, -\mu, \mu^*)'$ þar sem stikarnir μ og μ^*, séu þeir frábrugðnir einum, gætu endurspeglað mismunandi leitniferla þessara vörutegunda.[9] Þetta má sjá má því að meta eftirfarandi jöfnu

$$s_t = \alpha + \mu p_t - \mu^* p_t^* + \varepsilon_t \tag{2.7}$$

og prófa hvort frávikin séu sístæð eða ekki. Sístæð frávik styðja almennari útgáfu PPP. Nú virðast frávikin sístæð og er þá næsta skref að meta almennt jöfnukerfi eins og fjallað er um í Engle og Granger (1987). Með þessu móti er hægt að prófa hvort gengi gjaldmiðla sveiflist í kringum PPP-jafnvægi.

Fjöldi þriðju kynslóðar rannsókna byggðra á ofangreindri nálgun hefur verið birtur síðan á seinni hluta níunda áratugar síðustu aldar. Algeng niðurstaða er að núll-tilgátunni að $s_t - p_{t\text{-}1} + p^*_{t\text{-}1}$ sé ósístætt er hafnað oftar en ekki. Niðurstaðan er áfram viðkvæm fyrir matstímabilinu: sé notast við gögn eftir Bretton-Woods-tímabilið fæst að stikamat μ og μ^* er töluvert frábrugðið einum, sé notast við gögn yfir alla tuttugustu öldina fæst stikamat sem er nær einum.

Tímaraðirnar þrjár í mynd 1.1 má nota til að prófa PPP-kenninguna út frá ofangreindum aðferðum. Matið á stikum (2.7) gefur

$$s_t = 6{,}63 + 0{,}44 p_t - 1{,}07 p_t^* + \hat{\varepsilon}_t . \tag{2.8}$$

Metinn afgangslið (2.8) má sjá á mynd 2.1. Frávikin virðast sveiflast í kringum núll en það gefur til kynna að þau séu sístæð en þau virðast töluvert langlíf sem gefur hið gagnstæða til kynna. Formlegrar prófunar á tilgátunni er því þörf.

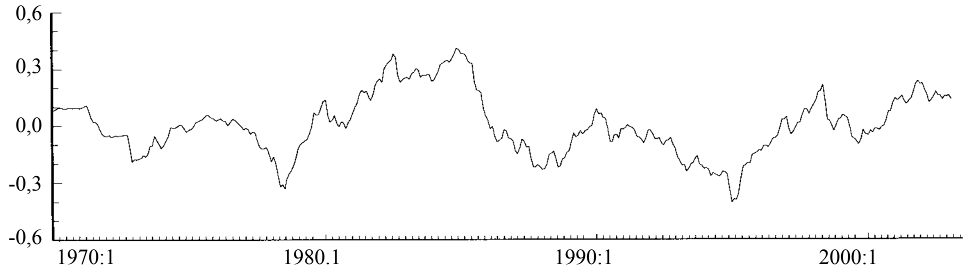
Culver og Papell (1999) prófa PPP-kenninguna fyrir fjölda ríkja þar sem núll-tilgátan er að raðirnar séu samþættar út frá tilgátuprófinu sem þróað var af Shin (1994). Með því að nota þeirra aðferð fæst að samþættingu milli raðanna er ekki hafnað við 5% öryggismörk. Ef gert er ráð fyrir

8. Balassa-Samuelson-áhrifin gefa til kynna að fátæk ríki vaxi hraðar en ríkari og neysluverðlag hækki hraðar í þeim fyrrnefndu en í þeim síðarnefndu. Meginástæða hraðari vaxtar fátækari ríkjanna er framleiðnivöxtur í framleiðslu viðskiptavöru en verð þeirra vara ákvarðast á heimsmarkaði og er jafnt milli landa. Kröftugur framleiðnivöxtur orsakar einnig miklar launahækkanir í framleiðslugeirum þar sem einungis eru framleiddar vörur sem ekki ganga í skiptum á milli landa. Í þessum atvinnugreinum má hins vegar gera ráð fyrir að framleiðni vaxi í takt milli landa. Miklar launahækkanir orsaka því miklar verðhækkanir í fátækum ríkjum á vörum sem ekki eru alþjóðlegar viðskiptavörur en það eykur jafnframt almenna verðbólgu í þessum ríkjum.

9. Þessi framsetning gerir ráð fyrir að erlent verðlag sé ytri stærð í þeirri merkingu að það verður ekki fyrir áhrifum frá hinum tveimur stærðunum. Þetta einfaldar greininguna þannig að hægt er að notast við tvívítt jöfnukerfi þannig að aðeins er um eitt samþættingarsamband að ræða.

Mynd 2.1

Frávik frá aðfallsgreiningunni (2.8)



að s_t, p_t og p_t^* séu samþætt er vektorinn $\boldsymbol{\beta}$ = (1, -0,44, 1,07), sem metinn var með (2.7), samþættingarvektor. Hann er ekki nálægt hinum einfalda PPP-vektor (1, -1, 1) en einhvern stuðning við almennari útgáfu PPP er hægt að lesa út úr gögnunum.[10]

3. Líkön af flökti hagstærða

Viðfangsefni fjölda fjármálahagfræðinga er að byggja líkön af flökti eignaverðs. Í eignasafnsfræðum er reynt að leiða út hagkvæmustu eignasöfn sem ráðast af breytileika og samdreifni (e. *covariance*) ávöxtunar mismunandi fjáreigna. CAPM-eignaverðslíkanið (e. *capital asset pricing model*) og önnur eignaverðslíkön sýna hvernig fjárfestum er umbunað fyrir að taka kerfisbundna áhættu, þ.e. áhættu tengda samdreifni þeirra eigin eignasafns og markaðssafnsins eða annarra kerfisbundinna áhættuþátta. Valréttarsamningar (e. *options*) eru verðlagðir út frá flökti í ávöxtun hinnar undirliggjandi eignar. Bankar og aðrar fjármálastofnanir nota svokölluð virði-í-húfi-líkön (e. *value-at-risk; VaR*) til að meta markaðsáhættu eignasafna sinna.[11] Í öllum þessum tilvikum liggur til grundvallar mat á flökti fjáreigna, þ.e. á samdreifniuppbyggingu ávöxtunar fjáreigna.

Lengi hefur verið þekkt meðal fjármálahagfræðinga að flökt í ávöxtun fjáreigna kemur í klösum og að jaðardreifni (e. *marginal distribution*) ávöxtunar fjölda fjáreigna er leptókúrtísk, þ.e. að þéttifall ávöxtunar hefur þykkari hala en samræmist normaldreifingu með sama meðaltal og breytileika. Þrátt fyrir að þessi klasahegðun ávöxtunar hafi lengi verið þekkt var ávöxtun fjáreigna lengi vel áfram meðhöndluð sem óháð og samdreifin (e. *homoscedastic*) yfir tíma. Sem dæmi má nefna Mandelbrot (1963) og Mandelbrot og Taylor (1967) sem notuðu Pareto-dreifingu til að lýsa þéttifalli ávöxtunar.[12] Eiginfylgnilíkan Roberts Engles af skilyrtu flökti var því tímamótauppgötvun á þessu sviði.

Við byrjum á að fjalla um hið einfalda ARCH-líkan Engles, ýmsar endurbætur á því og dæmi um hagnýtingu þess. Í kjölfarið fylgir umfjöllun um hið svokallaða ARCH-M-líkan (e. *ARCH-in-mean*) þar sem skilyrt meðaltal dreifingarinnar

10. Niðurstöðurnar eru hins vegar nokkuð viðkvæmar fyrir því hvernig núll-tilgátan er sett upp. Endurbætt Dickey-Fuller-próf fyrir núll-tilgátunni að frávikin innihaldi einingarrót, sjá Dickey og Fuller (1981), gefur t-gildi frá -2.3 til -2.5 sem eru ekki nægilega lág gildi til að hægt sé að hafna núll-tilgátunni við 10% öryggismörk (krítíska gildið er -2.58).

11. Ekki má rugla saman margvíðum tímaraðalíkönum (e. *vector autoregressions*) sem skammstafað er sem VAR og virði-í-húfi-líkönum (e. *value-at-risk*) sem skammstafað er sem VaR.

12. Ítarlega lýsingu á stöðugum Pareto-dreifingum og notkun þeirra í fjármála- og hagfræðirannsóknum má finna í Rachev og Mittnik (2000).

– vænt ávöxtun – er tengt með kerfisbundnum hætti við flökt ávöxtunar. Einnig er fjallað um margvíðar útfærslur á ARCH-líkönum, auk nýrra útfærslna á ARCH. Í lokin er fjallað um virðisáhættulíkön (VaR-líkön), þar sem ARCH leikur mikilvægt hlutverk.

3.1. Eiginfylgni í skilyrtu flökti

Í hefðbundinni tímaraðagreiningu er einblínt á að búa til líkön af skilyrtu meðaltali stærða. Gerum ráð fyrir að á tíma t mælum við slembivektorinn $(y_t, \mathbf{x}_t')'$ þar sem y_t er skalastærð og $\mathbf{x}_t$ er vektor af stærðum sem m.a. geta verið tafin gildi af y_t

$$(3.1) \qquad y_t = E(y_t|\mathbf{x}_t) + \varepsilon_t,$$

þar sem skilyrta meðaltalið $E(y_t|\mathbf{x}_t)$ er yfirleitt á stikaformi (e. *parametric form*),[13] $E(\varepsilon_t|\mathbf{x}_t) = E_t\varepsilon_t = 0$ og $E_t\varepsilon_t\varepsilon_s = 0$ fyrir $t \neq s$, þ.e. $\{\varepsilon_t\}$ er röð ófylginna (e. *uncorrelated*) slembistærða með meðaltal núll. Þegar stikar $E(y_t|\mathbf{x}_t)$ eru metnir er yfirleitt gert ráð fyrir að óskilyrtur breytileiki slembistærðarinnar ε_t sé fastur eða breytist yfir tíma með einhverjum ókerfisbundnum hætti (þetta var m.a. ein forsenda samþættingargreiningarinnar í síðasta kafla).

Engle (1982) gerði þvert á móti ráð fyrir að skilyrtur breytileiki ε_t væri breytilegur yfir tíma – þrátt fyrir að óskilyrtur breytileiki ε_t (sé hann skilgreindur) væri fasti. Með þessari byltingarkenndu hugmynd var mögulegt að skýra kerfisbundna hegðun breytileika yfir tíma og meta stika skilyrtrar dreifni stærðarinnar samtímis öðrum stikum skilyrts meðaltals. Þetta var algerlega ný hugsun innan fræðigreinarinnar.

Engle grundvallaði líkan sitt af skilyrtum breytileika ε_t í (3.1) þannig að líklegt væri að í kjölfar stórra jákvæðra eða neikvæðra frávika kæmu önnur stór frávik (jákvæð eða neikvæð) og í kjölfar smárra frávika kæmu smá frávik (jákvæð eða neikvæð). Formlega séð má því skipta ε_t upp þannig að $\varepsilon_t = z_t h_t^{1/2}$, þar sem $z_t \sim$ iid(0, 1) og

$$(3.2) \qquad h_t = \mathrm{var}(\varepsilon_t|F_t) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2,$$

þar sem $\varepsilon_t = y_t - E(y_t|\mathbf{x}_t)$ og upplýsingamengið F_t er gefið sem $\{\varepsilon_{t-j}: j > 1\}$. Einnig gildir að $a_0 > 0$ og $a_j = 0, j = 1, ..., q$.

Samkvæmt ARCH-líkani Engles (1982) í jöfnu (3.2) ræðst skilyrtur breytileiki ε_t af töfðum gildum ε_t^2. Í klassískri grein sinni þróaði Engle undirliggjandi matsfræði fyrir ARCH-líkön, skilyrði fyrir því að metill sennilegustu gilda (e. *maximum likelihood estimator*) væri samkvæmur (e. *consistent*) og normaldreifður í markgildi og leiddi út Lagrange-margfaldara-próf fyrir tilgátunni um að engin eiginfylgni væri í skilyrtum breytileika ε_t.

3.2. Endurbætur og notkun

Algengt virðist í fjármálagögnum að eiginfylgnifall ε_t^2 deyi tiltölulega hægt út þegar gögnin eru mæld á nægilega hárri tíðni, eins og t.d. dag- eða vikulega. Til þess að lýsa þessum eiginleikum raðarinnar þyrfti ARCH-líkan með margir tafir q. Ef líkanið í (3.2) er hins vegar endurbætt þannig að töfðum gildum af h_t er bætt við (yfirleitt dugar ein töf) er hægt að lýsa ofangreindum eiginleikum með tiltölulega fáum stikum. Fljótlega eftir birtingu ARCH-greinar Engles, þróaði nemandi Engles, Tim Bollerslev, slíkt líkan og kallaði það GARCH (e. *Generalised ARCH*). Þetta líkan má skrifa á eftirfarandi formi

$$(3.3) \qquad h_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-j}.$$

Fyrstu gráðu GARCH-líkan ($p = q = 1$), sem Taylor (1986) hafði einnig stungið upp á, hefur síðan orðið vinsælasta form ARCH-líkana í hagnýtum rannsóknum. Í samanburði við hið einfalda ARCH-líkan Engles hefur GARCH-líkanið ýmsa kosti þar sem stikar þess eru mun færri: fyrstu gráðu GARCH-líkan inniheldur einungis þrjá stika. GARCH-líkanið bætir hins vegar engu við hina undirliggjandi hugmynd sem Engle kom fyrstur fram með.

Engle (1982) notaði ARCH-líkan sitt á þjóðhagsgögn, eins og t.d. verðbólgu en áttaði sig fljótlega á hagnýtingu hugmyndarinnar fyrir fjár-

13. Hægt er að hugsa sér að skilyrt meðaltal stærðarinnar sé stikalaust (e. *non-parametric*) fall af $\mathbf{x}_t$ og er þá viðfangsefnið að meta fallformið.

málaleg gögn. Það var raunar Mandelbrot (1963) sem löngu áður hafði bent á að fyrir eignaverð virtist sem „... í kjölfar stórra verðbreytinga komi oft stórar verðbreytingar – hvort sem er hækkanir eða lækkanir – og í kjölfar lítilla verðbreytinga komi oft litlar verðbreytingar...“ en hann gerði enga tilraun til að búa til líkön sem lýstu þessari hegðun. Ef gert er ráð fyrir að skilyrt meðaltal sé fast er hægt að nota ARCH-líkan til að lýsa tímaröð sem er línuleg óháð yfir tíma en flökt hennar kemur í klösum. Þar sem ARCH-líkanið hentar einnig til að lýsa leptókúrtískri hegðun gagna er einnig hægt að nota það til að spá flökti ávöxtunar fjáreigna. Þessi líkön geta því nýst vel fyrir fjárfesta sem vilja lágmarka áhættu eignasafns síns.

Efri hluti myndar 3.1 sýnir daglega ávöxtun (fyrsta mismun lógariþma af lokadags-verði) Standard & Poor 500-hlutabréfaverðvísitölunnar frá 16. maí 1995 til 29. apríl 2003 – sem gerir 2.000 mælingar alls. Þar má glöggt sjá að tímabil óróleika skiptast á við tímabil þar sem meiri ró er yfir markaðnum, með sama hætti og fyrir gengisröðina á mynd 1.2.

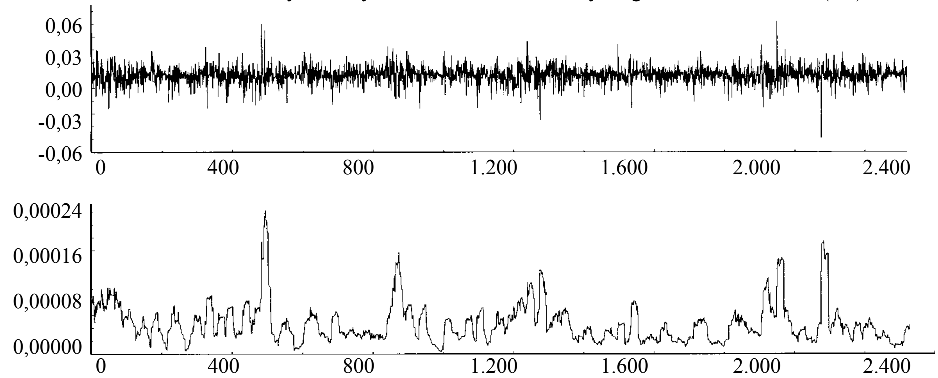
$$h_t = 2\times10^{-6} + 0{,}091\varepsilon_{t-1}^2 + 0{,}899h_{t-1}. \qquad (3.4)$$

Takið eftir að summa α og β er mjög nálægt einum sem er dæmigert fyrir ávöxtun fjáreigna. Nauðsynlegt og nægjanlegt skilyrði fyrir því að h_t sé veikt-sístæð stærð er að $\alpha + \beta < 1$ og er því skilyrði fullnægt í (3.4). Tafið gildi h_{t-1} hefur stikamatið 0,9 sem þýðir að 90% af breytingu í breytileika síðasta dags vara áfram fram á næsta dag og að helmingslíf breytileikaskellsins sé um sex dagar. Neðri hluti myndar 3.1 sýnir matið á h_t yfir tíma. Snöggar hækkanir í flökti deyja tiltölulega hægt út sem gefur til kynna að flöktskellir séu nokkuð lífseigir. Myndin sýnir einnig að á tímabilum mikils óróleika er skilyrtur breytileiki ávöxtunar töluvert hærri en hann er almennt. Þessi vitneskja hefur töluvert hagnýtt gildi þegar verið er að spá flökti ávöxtunar hlutabréfaverðvísitölu eða eignasafns. Nýlega umfjöllun um flöktspár er að finna í Poon og Granger (2003).

Líkönin í (3.2) og (3.3) eru skilgreind fyrir skilyrtan breytileika. Schwert (1990) þróaði hins vegar líkan fyrir skilyrt staðalfrávik raðarinnar, $h_t^{1/2}$. Þetta

Mynd 3.1

Efri hluti: Dagleg ávöxtun (fyrsti mismunur lógariþmagilda)
S&P 500-hlutabréfaverðvísitölunnar, 16. maí 1995 til 29. apríl 2003.
Neðri hluti: Metinn skilyrtur breytileiki sömu raðar út frá fyrstugráðu GARCH-líkani (3.4)



Mat á fyrstu gráðu GARCH-líkani fyrir gögnin í mynd 3.1, að því gefnu að slembistærðin z_t sé normaldreifð (og þar með er skilyrt dreifing ε_t normal), gefur

er mikilvægt þegar kemur að því að spá með GARCH-líkönum. Ef tapfall fjárfestis byggist á að lágmarka tölugildi spáskekkja (e. *mean absolute error*) í stað þess að lágmarka kvaðratfrávik spáskekkja (e. *mean square error*), sem er algengara, er eðlilegra að notast við skilyrt staðalfrávik fremur en skilyrtan breytileika ávöxtunar. Hægt er að hugsa sér almennara líkan sem inniheldur báða kosti. Slíkt líkan, kallað ósamhverft-veldis-GARCH (e. *asymmetric power GARCH*) var þróað af þeim Ding, Granger og Engle (1993) þar sem háða stærðin er h_t^δ, $\delta > 0$. Ding og félagar meta slíkt líkan fyrir S&P 500 og fá mat á $\delta = 1{,}43$ og tilgátunum um að $\delta = 1$ og $\delta = ½$ hafnað af gögnunum. Hið einfalda GARCH (1,1) hefur þrátt fyrir þetta haldið stöðu sinni sem langvinsælasta form GARCH-líkana í hagnýtum rannsóknum.

3.3. ARCH-M-líkön

ARCH- og GARCH-líkön henta vel við að meta skilyrtan breytileika og samdreifni tímaraða. Stór hluti fjármálafræða gengur hins vegar út á samband breytileika og samdreifni ávöxtunar mismunandi fjáreigna við vænta ávöxtun eignanna. Því virðist blasa við að útvíkka ARCH-líkanið þannig að tekið sé á þessu sambandi með formlegum hætti. Slíkt líkan var þróað af Engle, Lilien og Robins (1987), og var það jafnframt í fyrsta skipti sem Engle nýtti kenningar sínar á fjármálagögn. Engle og félagar horfðu til hagkerfis með tvær fjáreignir, eina áhættusama og aðra áhættulausa. Þeir gerðu ráð fyrir að áhættu mætti meta sem fall af skilyrtum breytileika áhættusömu eignarinnar. Af því leiðir að það verð sem áhættufælnir fjárfestar eru tilbúnir að bjóða fyrir þessa eign sveiflast yfir tíma og ákvarðar jafnvægisverðið samband ávöxtunar og breytileika. Þetta gefur til kynna að ávöxtunarkrafa áhættusömu eignarinnar aukist eftir því sem skilyrt flökt fjáreignarinnar er meira. Í sinni einföldustu mynd má lýsa þessu sambandi á eftirfarandi hátt

$$r_t = \beta + g(h_t) + \varepsilon_t, \tag{3.5}$$

þar sem r_t er umframávöxtun áhættueignarinnar á tíma t og $g(h_t)$ er fall af skilyrtum breytileika h_t, þar sem h_t ákvarðast út frá (3.2). Engle o.fl. (1987) skilgreindu $g(h_t) = \delta h_t^{½}$, $\delta > 0$, þ.e. sem margfeldi af skilyrtu staðalfráviki ε_t. Jöfnur (3.5) og (3.2) ákvarða í sameiningu ARCH-M-líkanið. Höfundarnir nota þetta líkan til að skýra mánaðarlega umframávöxtun sex mánaða bandarískra ríkisvíxla. Með því að gefa sér að áhættulausu vextirnir séu þriggja mánaða ríkisvíxlavextir fá þeir marktæk áhrif áhættuþáttarins $\delta h_t^{½}$ á umframávöxtun r_t.

Fjármálafræðin segja okkur hins vegar að verð fjáreignar ráðist ekki eingöngu af breytileika sínum heldur enn frekar af samdreifni eigin ávöxtunar við markaðssafnið (CAPM-líkanið) og aðra kerfisbundna áhættuþætti (högnunarlíkanið, e. Arbitrage Price Theory; APT-líkanið). Til að nota ARCH-M-líkanið við verðlagningu áhættusamra fjáreigna þarf því líkan af skilyrtri samdreifni eignanna. Í stað hins hefðbundna CAPM-líkans þar sem fjárfestar hafa sömu föstu væntingar um framtíðarmeðalávöxtun og breytileika hennar fæst skilyrt CAPM-líkan þar sem vænt ávöxtun mismunandi fjáreigna ræðst af tímaháðri samdreifni hennar við markaðssafnið.

Bollerslev, Engle og Wooldridge (1988) þróuðu fyrstir slíkt margvítt GARCH-líkan. Látum $\mathbf{r}_t$ tákna $n \times 1$ vektor af raunumframávöxtun fjáreigna á tíma t og $\boldsymbol{\omega}_t$ er samsvarandi vektor af vægi eignanna í eignasafninu. Samkvæmt CAPM-líkaninu ætti þá vektor skilyrtrar meðalumframávöxtunar að ráðast af samdreifni ávöxtunar einstakra eigna við markaðssafnið

$$\boldsymbol{\mu}_t = \delta \boldsymbol{H}_t \boldsymbol{\omega}_{t-1}, \tag{3.6}$$

þar sem $\mathbf{H}_t = [h_{ijt}]$ er $n \times n$ samdreifnifylki, h_{ijt} er skilyrt samdreifni ávöxtunar eignar i og eignar j á tíma t og δ er fasti. Samkvæmt (3.6) breytist vænt ávöxtun fjáreignar yfir tíma í samræmi við breytingar á samdreifniuppbyggingu eignasafnsins. Með öðrum orðum er hin svokallaða CAPM-beta breytileg yfir tíma. Fylkið $\mathbf{H}_t$ er skilgreint þannig að fyrir hvern skilyrtan breytileika- og samdreifnistika er sérstök jafna. Eins og sýnt er í Bollerslev o.fl. (1988) fæst eftirfarandi margvítt GARCH-M-líkan

$$\mathbf{r}_t = \boldsymbol{\alpha}_0 + \delta \mathbf{H}_t \boldsymbol{\omega}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

og[14]

$$\text{(3.7)}\qquad \mathrm{vech}(\mathbf{H}_t) = \boldsymbol{\alpha} + \sum_{j=1}^{q} \mathbf{A}_j \mathrm{vech}(\boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}\boldsymbol{\varepsilon}'_{t-j}) + \sum_{j=1}^{p} \mathbf{B}_j \mathrm{vech}(\mathbf{H}_{t-j}).$$

Ef fjáreignirnar eru þrjár (n = 3) inniheldur jöfnukerfið (3.7) sex jöfnur – þrjár fyrir skilyrtan breytileika eignanna og þrjár fyrir skilyrta samdreifni þeirra. Til að takmarka fjölda stika í (3.7) gefa Bollerslev o.fl. (1988) sér til einföldunar að $p = q = 1$ og að $\mathbf{A}_1$ og $\mathbf{B}_1$ séu hornalínufylki (e. *diagonal matrix*). Þeir nota líkanið síðan á ársfjórðungsleg gögn fyrir þrjár bandarískar fjáreignir: sex mánaða ríkisvíxla, tuttugu ára ríkisskuldabréf og NYSE-hlutabréfaverðvísitöluna (með arðgreiðslum). Niðurstöðurnar sýna m.a. sterka eiginfylgni í skilyrtum breytileika og samdreifni eignanna. Tilgátunni að breytileikafylkið $\mathbf{H}_t$ sé stöðugt yfir tíma er greinilega hafnað sem gefur til kynna að CAPM-beturnar séu breytilegar yfir tíma.

Engle (1987) stingur upp á annarri leið til að komast hjá vandamálinu með að meta mikinn fjölda stika, leið sem síðar var notuð af Engle, Ng og Rothschild (1990). Í hinu svokallaða þátta-ARCH-líkani (e. *factor ARCH model*) er vektor ávöxtunar gefinn sem

$$\text{(3.8)}\qquad \mathbf{r}_t = \mathbf{B}\boldsymbol{\xi}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t,$$

þar sem (3.8) lýsir þáttauppbyggingu (e. *factor structure*) $\mathbf{r}_t$, $\mathbf{B}$ er $n \times k$ fylki undirliggjandi áhrifaþátta, þ.e. stika sem þarf að meta, ξ_t er $k \times 1$ vektor af ómælanlegum áhrifaþáttum þar sem gert er ráð fyrir því að k sé mun lægri tala en n. Þetta gefur til kynna að þróun ávöxtunar fjölda fjáreigna ráðist af tiltölulega fáum sameiginlegum undirliggjandi áhrifaþáttum. Ef gert er ráð fyrir breytileikafylki ε_t ($\boldsymbol{\Psi}$) sé fast yfir tíma, að skilyrt breytileikafylki ξ_t sé hornalínufylkið $\boldsymbol{\Lambda}_t$ og að engin fylgni sé á milli ε_t og ξ_t er skilyrt breytileikafylki $\mathbf{r}_t$ gefið sem

$$\text{(3.9)}\qquad \mathrm{cov}(\mathbf{r}_t|F_t) = \boldsymbol{\Psi} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Lambda}_t\mathbf{B}' = \boldsymbol{\Psi} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_{jt}\boldsymbol{\beta}_j\boldsymbol{\beta}'_j,$$

þar sem $\mathbf{A}$ = diag(λ_{1t}, ..., λ_{kt}) og $\boldsymbol{\beta}_j$ er dálkur j í fylkinu $\mathbf{B}$. Að því gefnu að nota megi ARCH-líkan til að lýsa hverju λ_{jt} er hægt að meta stika þessa líkans. Matið má einfalda með því að gera ráð fyrir að eignasöfnin (vægi hverrar eignar í söfnunum) séu þekkt því að það felur í sér að gildi $\boldsymbol{\beta}_j$-vektorsins séu þekkt. Fjallað er um mat og túlkun þessa líkans í Engle o.fl. (1989). Þeir gera ráð fyrir einum sameiginlegum áhrifaþætti (k = 1 í (3.9)) við verðlagningu ríkisvíxla með mismunandi líftíma.

Engle hefur einnig, ásamt samstarfsmönnum sínum Diebold og Nerlove (1989), þróað sambærilegt líkan sem hefur nýst vel við að lýsa sameiginlegum flöktsveiflum í vikulegu gengi gjaldmiðla. Þáttalíkön af þessari tegund hafa einnig verið notuð til að greina tengsl milli alþjóðlegra hlutabréfamarkaða.

3.4. Aðrar endurbætur

Frá því að Engle þróaði upphaflega ARCH-líkan sitt hefur það verið endurbætt á marga vegu og gríðarlegur fjöldi hagnýtra rannsókna birst. Minnst er á hundruð hagnýtra rannsókna á fjármálalegum tímaröðum í yfirlitsgrein Bollerslevs, Chous og Kroners (1992) og þeim hefur stöðugt fjölgað. Fjöldi fræðimanna hefur þróað hina undirliggjandi tölfræði til að hægt sé að meta þessi líkön og leitt út skilyrði fyrir samkvæmni og normaldreifingu í markgildi fyrir metla sennilegustu gilda, bæði fyrir einvíð og margvíð ARCH- og GARCH-líkön.

Robert Engle hefur sjálfur lagt heilmikið til þessarar fræðigreinar. Eitt vandamál margvíðra GARCH-líkana var að tryggja að $\mathbf{H}_t$-fylkið sé jákvætt ákveðið á hverjum tíma. Engle og Kroner (1995) skilgreina einfalt GARCH-líkan, sem mikið hefur verið notað í hagnýtum rannsóknum, þar sem þetta skilyrði er uppfyllt. Engle (2002a)

14. Vech-virkinn velur mælingar hvers dálks í fylkinu sem liggja á eða ofan við meginhornalínu þess og raðar þeim hverjum ofan á annan, þar sem byrjað er á fyrsta dálkinum. T.d. ef fylkið **A** er gefið sem

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

þá er vech(**A**) = (a_{11}, a_{12}, a_{22})'.

hefur stungið upp á öðru margvíðu GARCH-líkani sem uppfyllir þetta skilyrði, en það er kallað kvikt GARCH-líkan af skilyrtri fylgni (e. *dynamic conditional correlation GARCH model*). Sambærilegt líkan hefur einnig verið þróað af Tse og Tsui (2002). Þetta líkan er endurbót á GARCH-líkani Bollerslevs (1990) með fastri skilyrtri fylgni.

Framlag Engles og Ngs (1993) er einnig mikilvægt en þeir þróa próf fyrir því hvort GARCH-líkön séu rétt skilgreind. Þeir sýna einnig hvernig hægt er að meta áhrif nýrra frétta á flökt ávöxtunar (e. *news impact curve*). Hugmyndin er sú að meta áhrif ε_{t-1} á h_t eftir að búið er að taka tillit til upplýsinga sem lágu fyrir fram að þeim tíma. Hægt er að bera saman áhrif nýrra frétta á skilyrt flökt ávöxtunar í mismunandi ARCH- og GARCH-líkönum. Áhrif nýrra frétta í GARCH (1,1)-líkani eru t.d. gefin sem

$$h_t = A + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

þar sem $A = \alpha_0 + \beta_1 \sigma^2$ (σ^2 er óskilyrtur breytileiki ε_t). Áhrifin eru því samhverf um $\varepsilon_{t-1} = 0$. Önnur GARCH-líkön geta gefið ósamhverf áhrif, sjá t.d. Engle og Ng (1993) og Ding o.fl. (1993). Samkvæmt slíkum líkönum eru áhrif jákvæðra og neikvæðra frétta af sömu stærð á skilyrt flökt ávöxtunar ekki þau sömu.

Grunnhugmynd Engles hefur einnig fætt af sér fjölda ólíkra forma af ARCH-líkönum. Eitt algengasta formið er hið svokallaða EGARCH-líkan Nelsons (1991), þar sem líkanið er skilgreint fyrir lógariþma skilyrts breytileika tímaraðarinnar. Þetta er fyrsta ósamhverfa GARCH-líkanið. Ekki er þörf á neinum hliðarskilyrðum á stika EGARCH-líkansins til að tryggja að skilyrtur breytileiki stærðarinnar sé stærri en núll á hverjum tíma með sama hætti og í venjulegum GARCH-líkönum.

Annað líkan sem vert er að minnast á er hið svokallaða slembiflöktlíkan (e. *stochastic volatility model*). Ólíkt GARCH-líkönum er í þessu tilviki gert ráð fyrir því að lógariþmi skilyrts breytileika sé sjálfur slembistærð. Fyrstu gráðu slembiflöktlíkan var fyrst þróað af Taylor (1982) og er á eftirfarandi formi

$$\log h_t = \alpha + \beta \log h_{t-1} + \eta_t$$

þar sem h_t er skilyrtur breytileiki stærðarinnar og $\{\eta_t\}$ er runa iid(0,1)-slembistærða. Ýmis tæknileg vandamál fylgja því að nota þetta líkan til að meta flökt ε_t. Það hefur ekki lokaða lausn þar sem jafnan inniheldur tvær ómælanlegar slembistærðir: $\{z_t\}$ sem fæst út úr sundurgreiningunni $\varepsilon_t = z_t h_t^{1/2}$ og $\{\eta_t\}$. Nýlega hefur áhugi á þessum líkönum aukist í kjölfar framþróunar talnafræðilegra aðferða við að meta stika líkansins, sjá yfirlitsgreinar Ghysels, Harveys og Renaults (1996) og Shephards (1996).

Út frá ARCH-líkönum hefur Engle nýlega þróað ný líkön til greiningar á grunnuppbyggingu fjármálamarkaða (e. *market microstructure*). Hugmyndin er sú að nota GARCH-líkön til að skýra tímann sem líður á milli viðskipta á markaði. Þetta er hægt vegna þess að tíminn á milli viðskipta er jákvæð stærð með sama hætti og ε_t^2 í hefðbundnum ARCH-líkönum. Þannig hafa Engle og Russell (1998) og Engle (2000) þróað eiginfylgnilíkön fyrir skilyrtan tíma á milli viðskipta (e. *autoregressive conditional duration models; ACD*). Með þessu kom Engle af stað nýrri fræðigrein þar sem reynt er að skýra hegðun einstakra fjárfesta á hlutabréfamarkaði. Þessar greinar hafa vakið mikla athygli og hefur fjöldi greina um ACD-líkön birst undanfarið.

3.5. Notkun við mat á virði í húfi

Ásamt því að vera notuð við greiningu á eignaverðum hafa ARCH- og GARCH-líkön einnig verið notuð á öðrum sviðum fjármálahagfræði. Verðlagning valréttarsamninga, þar sem breytileiki hinnar undirliggjandi eignar gegnir lykilhlutverki, er augljóst dæmi; sjá t.d. Noh, Engle og Kane (1994).

ARCH- og GARCH-líkön hafa einnig notið vinsælda í nútíma áhættustjórnun og eru í raun orðin að ómissandi hluta verkfærakassa þeirra sem stýra áhættu eignasafna. Bankar, önnur fjármálafyrirtæki og fjöldi stórfyrirtækja notast við hina svokölluðu virði-í-húfi-greiningu (VaR-greiningu). VaR-líkön eru einnig notuð við mat á eiginfjárkröfum vegna markaðsáhættu í samræmi við Basel II-reglurnar svokölluðu: sjá t.d. rit Basel-nefndarinnar (1996). Til skýringar er hægt að hugsa sér fjárfestingu í eignasafni. Við viljum geta myndað okkur skoðun á því hvað væri mögulegt lágmarkstap af fjárfestingunni, $L_{\min}$, við gefnar ákveðnar, litlar líkur α. Spáð gildi $L_{\min}$, þ.e. virðið í húfi, mælir því áhættu eignasafnsins. Þessu má einnig snúa á hvolf og segja að við teljum með $(1-\alpha)$% líkum að tapið verði ekki meira en $L_{\min}$. Þetta er því augljóslega nokkuð sem horfa ætti til við áhættustjórnun, t.d. fyrir eftirlitsaðila sem vilja tryggja að eigið fé banka sé nægilegt þannig að ekki séu meiri en α% líkur á að bankinn verði gjaldþrota t.d. innan næsta mánaðar.

Kosturinn við VaR-greiningu er að með henni er hægt að auðkenna markaðsáhættu eignasafns með einni auðskiljanlegri tölu. Hægt er að reikna út mögulegt tap að því gefnu að jaðardreifni ávöxtunar sé stöðug yfir tíma – en það virðist ekki raunhæf forsenda. Ef líkindadreifing ávöxtunar breytist yfir tíma þarf eitthvert líkan til að reyna að spá þróun skilyrtra gilda dreifingarinnar. Ef gert er ráð fyrir að ávöxtun fylgi skilyrtri normaldreifingu nægir að skoða tvö fyrstu gildi dreifingarinnar, þ.e. meðaltal og breytileika. GARCH-líkön eru þá almennt notuð til að meta skilyrtan breytileika dreifingarinnar sem nýtist síðan við að reikna út vænt tap eignasafnsins (þau má einnig nota þegar ekki er gert ráð fyrir normaldreifingu). Algengt er að notast við veldisvegið hreyfanlegt meðaltal

$$h_t = (1-\beta_1)\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}, \qquad 0 < \beta_1 < 1,$$

sem er sértilvik af (3.3) og er oft kallað þáttað GARCH-líkan (e. *integrated GARCH*) Engles og Bollerslevs (1986).

Í yfirlitsgrein Marginellis og Engles (2001) er að finna umfjöllun um fjölda reikniaðferða til að meta virðið í húfi. Ýmsar útgáfur af GARCH-líkönum hafa leikið mikilvægt hlutverk í þessari þróun. Þannig hafa t.d. Engle og Marginelli (1999) þróað svokallað skilyrt eiginfylgni-VaR-líkan þar sem byggt er á þeirri hugmynd að meta beint gildi α.

Sem einfalt dæmi um notkun GARCH-líkana í VaR-greiningu má hugsa sér einnar milljónar dollara fjárfestingu í eignasafni sem samanstendur af S&P 500-hlutabréfaverðvísitölunni – sjá mynd 3.1. Gefum okkur að fjárfestirinn noti GARCH(1,1)-líkanið (3.4) með normaldreifðum slembiþætti til að finna þá hámarksupphæð sem hann gæti mögulega tapað miðað við 99% líkur ákveði hann að halda eignasafninu óbreyttu út næsta viðskiptadag. Tökum t.d. tvo viðskiptadaga, föstudaginn 1. september 1995 þegar skilyrtur breytileiki metinn út frá (3.4) er í sínu lægsta gildi og 31. júlí 2002 þegar breytileikinn nær sínu hæsta gildi.[15] Spáð hámarkstap út frá GARCH-líkaninu fyrir þriðjudaginn 5. september (mánudagurinn þar á undan er almennur frídagur í Bandaríkjunum) er 12.400 dollarar en sambærilegt hámarkstap fyrir 1. ágúst 2002 er 61.500 dollarar. Þessi mismunur á væntu hámarkstapi sýnir hversu mikilvægt það getur verið að gera ráð fyrir að breytileiki ávöxtunar geti breyst yfir tíma og hversu gagnleg ARCH-líkön eru fyrir VaR-greiningu.

4. Önnur framlög

Bæði Engle og Granger hafa lagt margt annað mikilvægt til hagmælinga með tímaraðir. Auk náins samstarfs við Granger við þróun á prófum fyrir samþættingu og matsaðferðum fyrir líkön með samþættum stærðum hefur Engle einnig átt þátt í að auka skilning á meðhöndlun ytri stærða (e. *exogeneity*) en hún skiptir miklu máli í hagmælingum (Engle, Hendry og Richard, 1983, og Engle og Hendry, 1993). Áhrifa Grangers gætir einnig víða. Vinna hans við að þróa próf sem gerir kleift að kanna orsakasamband milli stærða (Granger, 1969) hefur getið af sér fjölda rannsókna. Hann hefur einnig átt þátt í þróun svokallaðra langminnislíkana (e. *long-memory models*) sem notið hafa vinsælda í hagmælingum (Granger og Joyeux, 1980). Granger var jafnframt einn sá fyrsti sem notaði spektursgreiningu (Granger og Hatanaka, 1964) og ólínuleg líkön (Granger og Andersen, 1978) við greiningu á hagrænum gögnum.

15. Hafa þarf í huga að þetta er einungis dæmi til að lýsa aðferðinni þar sem líkanið er metið út tímabilið til 29. apríl 2003. Í raunveruleikanum væri einungis hægt að meta GARCH-líkanið fram til þess dags þegar virðið í húfi er reiknað út.

Fræðilegt framlag hans til spágerðar með hagrænum gögnum og hagnýting þeirra er einnig mikilvægt. Granger og Morgenstern (1970) er klassísk grein í þeim fræðum, og upphaf rannsókna á því hvernig megi blanda saman mismunandi spám má rekja til Grangers og Bates (1969).

5. Yfirlit og hugmyndir að frekari lesningu

Frá því að Engle og Granger þróuðu fyrst hugtakið samþættingu hefur það gefið af sér gríðarlega umfangsmikið fræðasvið. Ótrúlegur fjöldi bóka og fræðigreina tengdra fræðilegum undirstöðum þess og hagnýtar rannsóknir sem nýta þessar aðferðir hefur birst. Samþætting er nú orðin hluti af hefðbundnu umfjöllunarefni kennslubóka í hagmælingum. Í Engle og Granger (1991) er að finna fjölda lykilgreina á þessu sviði, þ.á m. margar greinar sem minnst hefur verið á í þessari grein. Bækur eftir Banerjee, Dolado, Galbraith og Hendry (1993), Johansen (1995) og Hatanaka (1996) fjalla um hina undirliggjandi tölfræði á bak við samþættingarhugtakið. Í yfirlitsgrein Watsons (1994) er að finna nánari umfjöllun um meðhöndlun ósístæðra stærða í almennum VAR-líkönum. Almenna umfjöllun um hina undirliggjandi tölfræði ósístæðra stærða er að finna í Tanaka (1996).

Eiginfylgni í skilyrtu flökti tímaraða hefur með sama hætti og samþætting getið af sér viðamikið fræðasvið og í flestum nýlegum kennslubókum í tímaraðagreiningu og hagmælingum er nú að finna umfjöllun um ARCH-líkön. Í Engle (1995) er að finna fjölda lykilgreina á þessu sviði. Meðal yfirlitsgreina má nefna Bollerslev, Engle og Nelson (1994), Diebold og Lopez (1995), Palm (1996) og Shephard (1996). Bók Gouriéroux (1996) fjallar bæði um hina undirliggjandi tölfræði og hagnýtingu á fjármálagögn. Í Engle (2002b) er að finna vísbendingar fyrir framtíðina.

Rannsóknir Clive Grangers á ósístæðum tímaröðum og Roberts Engles á flökti hafa haft mikil áhrif á hagnýtar rannsóknir í hagfræði og fjármálum. Samþætting og ARCH, og aðferðir tengdar þessum tveimur hugtökum sem þessir tveir fræðimenn hafa þróað, hafa haft varanleg áhrif á það hvernig hagmælingar eru stundaðar.

Heimildaskrá

Balke, N., og T. B. Fomby (1997). Threshold cointegration, *International Economic Review*, 38, 627-645.

Banerjee, A., J. Dolado, J. W. Galbraith og D. F. Hendry (1993). *Co-Integration, Error-Correction and the Econometric Analysis of Non-Stationary Data*. Oxford: Oxford University Press.

Basel Committee on Banking Supervision (1996). *Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risk*. Basel.

Bollerslev, T., (1990). Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH model, *Review of Economics and Statistics*, 72, 498-505.

Bollerslev, T., (1996). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.

Bollerslev, T., R. Y. Chou og K. F. Kroner (1992). ARCH modeling in finance: A review of the theory and empirical evidence, *Journal of Econometrics*, 52, 5-59.

Bollerslev, T., R. F. Engle og D. B. Nelson (1994). ARCH models, í bókinni *Handbook of Econometrics*, Vol. 4, 2959-3038. Ritstjórar R. F. Engle og D. L. McFadden. Amsterdam: North-Holland.

Bollerslev, T., R. F. Engle og J. Wooldridge (1998). A capital asset-pricing model with time-varying covariances, *Journal of Political Economy*, 96, 116-131.

Campbell, J. Y., (1987). Does saving anticipate declining labor income? An alternative test of the permanent income hypothesis, *Econometrica*, 55, 1249-1273.

Campbell, J. Y., og R. J. Shiller (1987). Cointegration and tests of present value models, *Journal of Political Economy*, 95, 1062-1088.

Campbell, J. Y., og R. J. Shiller (1988). The dividend-price ratio and expectations of future dividends and discount factors, *Review of Financial Studies*, 1, 195-228.

Cassel, G., (1992). *Money and Foreign Exchange After 1914*. New York: MacMillan.

Cochrane, J. Y., (1994). Permanent and transitory components of GNP and stock prices, *Quarterly Journal of Economics*, 109, 241-266.

Culver, S. E., og D. H. Papell (1999). Long-run purchasing power parity with short-run data: Evidence with a null hypothesis of stationarity, *Journal of International Money and Finance*, 18, 751-768.

Davidson, J. E. H., D. F. Hendry, F. Srba og S. Yeo (1978). Econometric modelling of the aggregate time-series relationship between consumers' expenditure and income in United Kingdom, *Economic Journal*, 88, 661-692.

Dickey, D. A., og W. A. Fuller (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root, *Journal of the American Statistical Association*, 74, 427-431.

Dickey, D. A., og W. A. Fuller (1981). Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root, *Econometrica*, 49, 1057-1072.

Diebold, F. X., og J. A. Lopez (1995). Modelling volatility dynamics, í bókinni *Macroeconomics: Developments, Tensions, and Prospects*. Ritstjóri K. D. Hoover. Boston: Kluwer.

Ding, Z., C. W. J. Granger og R. F. Engle (1993). A long memory property of stock market returns and a new model, *Journal of Empirical Finance*, 1, 83-106.

Edison, H., (1987). Purchasing power parity in the long run: A test of the dollar/pound exchange rate 1890-1978, *Journal of Money, Credit, and Banking*, 19, 376-387.

Engle, R. F., (1987). Multivariate GARCH with factor structures-cointegration in variance, University of California, San Diego, Department of Economics, óbirt handrit.

Engle, R. F., (2000). The econometrics of ultra-high-frequency data, *Econometrica*, 68, 1-22.

Engle, R. F., (2002a). Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity models, *Journal of Business and Economic Studies*, 20, 339-350.

Engle, R. F., (2002b). New frontiers for ARCH models, *Journal of Applied Econometrics*, 17, 425-446.

Engle, R. F., og T. Bollerslev (1986). Modeling the persistence of conditional variances, *Econometric Reviews*, 5, 1-50.

Engle, R. F., ritstj. (1995). *ARCH: Selected Readings*. Oxford: Oxford University Press.

Engle, R. F., og C. W. J. Granger (1987). Co-integration and error-correction: Representation, estimation and testing, *Econometrica*, 55, 251-276.

Engle, R. F., og C. W. J. Granger, ritstj. (1991). *Long-Run Economic Relationships: Readings in Cointegration*. Oxford: Oxford University Press.

Engle, R. F., og D. F. Hendry (1993). Testing super exogeneity and invariance, *Journal of Econometrics*, 56, 119-139.

Engle, R. F., D. F. Hendry og J.-F. Richard (1983). Exogeneity, *Econometrica*, 51, 277-304.

Engle, R. F., og K. F. Kroner (1995). Multivariate simultaneous generalized ARCH, *Econometric Theory*, 11, 122-150.

Engle, R. F., D. M. Lilien og R. P. Robins (1987). Estimating time-varying risk premia in the term structure: The ARCH-M model, *Econometrica*, 55, 391-407.

Engle, R. F., og S. Manganelli (1999). CAViaR: Conditional autoregressive value at risk by regression quantiles, University of California, Economics Department, *Working Paper*, 99-20.

Engle, R. F., og V. K. Ng (1993). Measuring and testing the impact of news on volatility, *Journal of Finance*, 48, 1749-1777.

Engle, R. F., V. K. Ng og M. Rothschild (1990). FACTOR-ARCH covariance structure: Empirical estimates for treasury bills, *Journal of Econometrics*, 45, 213-237.

Engle, R. F., og J. R. Russell (1998). Autoregressive conditional duration: A new model for irregular spaced transaction data, *Econometrica*, 66, 1127-1162.

Frankel, J., (1986). International capital mobility and crowding out in the U.S. economy: Imperfect integration of financial and goods markets?, í bókinni *How Open is the US Economy*. Ritstjóri R. Hafer. Lexington: Lexington Books.

Frenkel, J., (1978). Quantifying capital mobility in the 1980s, í bókinni *National Saving and Economic Performance*. Ritstjórar D. Bernheim og J. Shoven. Chicago: University of Chicago Press.

Frenkel, J., (1981). The collapse of purchasing power parity during the 1970s, *European Economic Review*, 16, 145-165.

Froot, K. A., og K. Rogoff (1995). Perspective on PPP and long-run real exchange rates, í bókinni *Handbook of International Economics*, Vol. 3, 1647-1688. Ritstjórar G. Grossman og K. Rogoff. Amsterdam: North-Holland.

Fuller, W. A., (1976). *Introduction to Statistical Time Series*. New York: Wiley.

Ghysels, E., A. C. Harvey og E. Renault (1996). Stochastic volatility, í bókinni *Handbook of Statistics 14*. Ritstjórar G. S. Maddala og C. R. Rao. Amsterdam: North-Holland.

Gouriéroux, C., (1996). *ARCH Models and Financial Applications*. Berlin: Springer-Verlag.

Granger, C. W. J., (1969). Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods, *Econometrica*, 37, 424-438.

Granger, C. W. J., (1981). Some properties of time series data and their use in econometric model specification, *Journal of Econometrics*, 16, 121-130.

Granger, C. W. J., (2001). Spurious regressions in econometrics, í bókinni *A Companion to Theoretical Econometrics*, 557-561. Ritstjóri B. H. Baltagi. Oxford: Blackwell.

Granger, C. W. J., og A. P. Andersen (1978). *Introduction to Bilinear Time Series Models*. Göttingen: Vandenhoeck and Ruprecht.

Granger, C. W. J., og J. Bates (1969). The combination of forecasts, *Operations Research Quarterly*, 20, 451-468.

Granger, C. W. J., og M. Hatanaka (1964). *Spectral Analysis of Economic Time Series*. Princeton NJ: Princeton University Press.

Granger, C. W. J., og R. Joyeux (1980). An introduction to long-memory time series models and fractional differencing, *Journal of Time Series Analysis*, 1, 15-30.

Granger, C. W. J., og T.-H. Lee (1990). Multicointegration, í bókinni *Advances in Econometrics: Cointegration, Spurious Regressions and Unit Roots*, 17-84. Ritstjórar G. F. Rhodes Jr. og T. B. Fomby. New York: JAI Press.

Granger, C. W. J., og O. Morgenstern (1970). *Predictability of Stock Market Prices*. Lexington: Heath.

Granger, C. W. J., og P. Newbold (1974). Spurious regressions in econometrics, *Journal of Econometrics*, 2, 111-120.

Granger, C. W. J., og N. R. Swanson (1996). Further developments in the study of cointegrated variables, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 58, 374-386.

Granger, C. W. J., og A. A. Weiss (1983). Time series analysis of error-correction models, í bókinni *Studies in Econometrics, Time Series and Multivariate Statistics, in Honor of T. W. Anderson*, 255-278. Ritstjórar S. Karlin, T. Amemiya og L. A. Goodman. San Diego: Academic Press.

Hall, A. D., H. M. Anderson og C. W. J. Granger (1992). A cointegration analysis of treasury bill yields, *Review of Economics and Statistics*, 74, 116-126.

Hatanaka, M., (1996). *Time-Series-Based Econometrics: Unit Roots and Cointegration*. Oxford: Oxford University Press.

Hendry, D. F., J. N. J. Muellbauer og A. Murphy (1990). The econometrics of DHSY, í bókinni *A Century of Economics: 100 Years of the Royal Economic Society and the Economic Journal*, 298-334. Oxford: Blackwell.

Hylleberg, S., R. F. Engle, C. W. J. Granger og B. S. Yoo (1990). Seasonal cointegration, *Journal of Econometrics*, 44, 215-238.

Johansen, S., (1988). Statistical analysis of cointegrating vectors, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, 231-254.

Johansen, S., (1991). Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in Gaussian vector autoregressive models, *Econometrica*, 59, 1551-1580.

Johansen, S., (1995). *Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*. Oxford: Oxford University Press.

Johansen, S., og K. Juselius (1990). Maximum likelihood estimation and inference on cointegration – with applications to the demand for money, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 52, 169-210.

King, R. G., C. I. Plosser, J. H. Stock og M. W. Watson (1991). Stochastic trends and economic fluctuations, *American Economic Review*, 81, 819-840.

Kwiatowski, D., P. C. B. Phillips, P. Schmidt og T. Shin (1992). Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: How sure are we that economic series have a unit root?, *Journal of Econometrics*, 54, 159-178.

Lettau, M., og S. Ludvigson (2001). Consumption, aggregate wealth, and expected stock returns, *Journal of Finance*, 56, 815-850.

Lettau, M., og S. Ludvigson (2003). Understanding trend and cycle in asset values: Reevaluating the wealth effect on consumption, National Bureau of Economic Research (NBER), *Working Paper* 9849.

Lo, M. C., og E. Zivot (2001). Threshold cointegration and nonlinear adjustment to the law of one price, *Macroeconomic Dynamics*, 5, 533-576.

Mandelbrot, B., (1963). The variation of certain speculative prices, *Journal of Business*, 36, 394-419.

Mandelbrot, B., og H. Taylor (1967). On the distribution of stock price differences, *Operations Research*, 15, 1057-1062.

Manganelli, S., og R. F. Engle (2001). Value at risk models in finance, European Central Bank, *Working Paper* 75.

Meese, R., og K. Rogoff (1988). Was it real? The exchange rate differential relation over the modern floating exchange rate period, *Journal of Finance*, 43, 933-948.

Nelson, D. B., (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach, *Econometrica*, 59, 347-370.

Noh, J., R. F. Engle og A. Kane (1994). Forecasting volatility and option pricing of the SP 500 index, *Journal of Derivatives*, 2, 17-31.

Palm, F. C., (1996). GARCH models of volatility, í bókinni *Handbook of Statistics* 14, 209-240. Ritstjórar G. Maddala og C. R. Rao. Amsterdam: North-Holland.

Phillips, A. W., (1957). Stabilization policy and the time forms of lagged responses, *Economic Journal*, 67, 265-277.

Phillips, P. C. B., (1986). Understanding spurious regressions, *Journal of Econometrics*, 33, 311-340.

Phillips, P. C. B., og P. Perron (1988). Testing for a unit root in a time series regression, *Biometrika*, 75, 335-346.

Poon, S.-H., og C. W. J. Granger (2003). Forecasting volatility in financial markets: A review, *Journal of Economic Literature*, 41, 478-539.

Rachev, S., og S. Mittnik (2000). *Stable Paretian Models in Finance*. Chichester: Wiley.

Saikkonen, P., og R. Luukkonen (1993). Testing for a moving average unit root in autoregressive integrated moving average models, *Journal of the American Statistical Association*, 88, 596-601.

Sargan, J. D., (1964). Wages and prices in the United Kingdom: A study in econometric methodology, í bókinni *Econometric Analysis for National Economic Planning*. Ritstjórar P. E. Hart, G. Mills og J. N. Whittaker. London: Butterworths.

Sarno, L., og M. P. Taylor (2002). Purchasing power parity and the real exchange rate, *IMF Staff Papers*, 49, 65-105.

Schwert, G. W., (1990). Stock volatility and the crash of '87, *Review of Financial Studies*, 3, 77-102.

Shephard, N. G., (1996). Statistical aspects of ARCH and stochastic volatility, í bókinni *Time Series Models: In Econometrics, Finance and Other Fields*, 1-67. Ritstjórar D. R. Cox, D. V. Hinkley og O. E. Barndorff-Nielsen. London: Chapman and Hall.

Shin, Y., (1994). A residual-based test of the null of cointegration against the alternative of no cointegration, *Econometric Theory*, 10, 91-115.

Sims, C. A., (1980). Macroeconomics and reality, *Econometrica*, 48, 1-48.

Stock, J. H., (1987). Asymptotic properties of least squares estimators of cointegrating vectors, *Econometrica*, 55, 1035-1056.

Tanaka, K., (1996). *Time Series Analysis: Nonstationarity and Noninvertability Distribution Theory*. New York: Wiley.

Taylor, S. J., (1982). Financial returns modeled by the product of two stochastic processes – a study of the daily sugar prices 1961-75, í bókinni *Time Series Analysis: Theory and Practice*, 203-226. Ritstjóri O. D. Anderson. Amsterdam: North-Holland.

Taylor, S. J., (1986). *Modelling Financial Time Series*. Chichester: Wiley.

Tse, Y. K., og A. K. C. Tsui (2002). A multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model with time-varying correlations, *Journal of Business and Economic Statistics*, 20, 351-362.

Watson, M. W., (1994). Vector autoregressions and cointegration, í bókinni *Handbook of Econometrics*, Vol. 4, 2844-2915. Ritstjórar R. F. Engle og D. L. MacFadden. Amsterdam: North-Holland.

Xiao, Z., og P. C. B. Phillips (2002). A CUSUM test for cointegration using regression residuals, *Journal of Econometrics*, 108, 43-61.