Fjármálatíðindi 52. árgangur síðara hefti 2005, bls. 36-59

Notkun þvingaðra splæsifalla til að smíða íslenska vaxtarófið

Sverrir Ólafsson[1]
Arnar Jónsson[2]

Ágrip: Í þessari grein lítum við á helstu atriði vaxtarófsgreiningar og ræðum kosti og takmarkanir mismunandi aðferða. Við beitum bestunaraðferðum til að smíða nafnvaxtaróf íslenska markaðarins út frá upplýsingum um verð óverðtryggðra skuldabréfa. Sérstök áhersla er lögð á ýmis vandamál við að smíða vaxtarófið í tregum mörkuðum. Við notum „bootstrapping" (e. *bootstrapping*) ásamt þvingaðri bestun með aðferð minnstu fervika. Við ræðum nauðsyn þess í tregum mörkuðum (e. *non-liquid markets*) að finna rétt jafnvægi á milli þess að lágmarka skekkju í verðlagningu athugaðra bréfa og þess að draga úr sveiflukenndu hátterni vaxtarófsins, sérstaklega framvirka vaxtarófsins. Eins ræðum við nokkuð ítarlega mismunandi aðferðir til að brúa á milli vaxtapunkta sem fundnir eru með bootstrapping. Til að framlengja vaxtarófið til skemmri tímasetninga notum við upplýsingar um REIBOR-vexti. Út frá þeim hönnum við skammtíma affallabréf (e. *zero coupon bond*) og greinum þau síðan með samtíma safni óverðtryggðra skuldabréfa. Vandamálið við þessa aðferð er að þar sem REIBOR-vextir eru millibankavextir innihalda þeir einhverja áhættuþóknun, sem ekki er fyrir hendi í ríkisskuldabréfum. Þetta leiðir til smávægilegrar skekkju sem erfitt er að leiðrétta.

Lykilorð: Tímabundnir vextir, framvirkir vextir, vaxtaróf, bootstrapping, þjálguð splæsiföll.

JEL: C61, C65, C80, G10, G13

1. Inngangur

Tímavirði peninga er lýst með tengslum á milli ávöxtunar vaxtabréfa og samningslengdar. Formlega er tengslunum lýst með sk. vaxtarófi, sem sýnir ávöxtun jafn áhættumikilla vaxtabréfa sem fall af tíma. Vaxtarófið gegnir grundvallarhlutverki við verðlagningu vaxtabréfa og annarra vaxtasamninga (Anderson, Breedon, Deacon, Derry og Murphy, 1996). Haldgóður skilningur á lögun og tímaþróun vaxtarófsins skiptir því miklu máli og er forsenda þess að verðlagning mismunandi vaxtasamninga útiloki áhættulausa hagnaðarmöguleika með því að taka á sama tíma stöðu í mismunandi vaxtabréfum.

Vaxtarófið gegnir ekki einungis mikilvægu hlutverki við verðlagningu vaxta- og vaxtaafleiðusamninga, s.s. gólf- og þaksamninga eða skiptasamninga. Greining vaxtarófsins gegnir lykilhlutverki í nútíma fjármálafræðum og hagfræði. Vaxtarófið hefur t.d. verið notað til að spá fyrir um efnahagsstarfsemi (Diebold, Rudebush og Aruoba, 2004), verga landsframleiðslu (Ang, Piazzesi og Wei, 2003), þróun gengis á milli mismunandi gjaldeyrissvæða (Bernadell, Coche og Nyholm, 2005) og verðbólguvæntingar (Brooke

1 Sverrir Ólafsson er yfirmaður flæknirannsókna við Rannsóknarstofur British Telecom og forstjóri Riscon, ráðgjafafyrirtækis fyrir fjárhagslega áhættustýringu. Tölvupóstfang: sverrir.olafsson@bt.com.

2 Arnar Jónsson er forstöðumaður gjaldeyris- og afleiðuviðskipta við Landsbanka Íslands.Tölvupóstfang: arnar.jonsson@landsbanki.is. Höfundar þakka Hirti Jónssyni fyrir gagnlegar athugasemdir á fyrri drögum greinarinnar. Tveir ónafngreindir rýnar bentu á ýmislegt sem betur mátti fara.

og Cooper, 2000) svo að nokkuð sé nefnt. Innsýn í skammtíma og langtíma væntingar markaðarins, eins og þær birtast í þróun vaxtarófsins, er því mikilvæg fyrir þátttakendur á fjármálamarkaði og eins við stýringu hagkerfisins.

Að sjálfsögðu er ekki til neitt eitt vaxtaróf heldur má smíða mismunandi vaxtaróf fyrir verkfæri með mismunandi áhættu. Á hverjum markaði gegnir þó áhættulausa vaxtarófið grundvallarhlutverki, en það tengist fjárfestingu í skuldabréfum, sem gefin eru út af ríkinu eða öðrum ríkistengdum stofnunum. Skuldabréf, sem gefin eru út af fyrirtækjum eða einstaklingum, bjóða upp á ávöxtun, sem venjulega hefur svipaða „tímalögun“ og áhættulausa vaxtarófið en bera þó hærri ávöxtun vegna meiri áhættu. Í öllum tilfellum skiptir það höfuðmáli hver er tilgangurinn með því að smíða vaxtarófið.

Í grundvallaratriðum má segja að aðferðir til að smíða vaxtarófið skiptist í tvo flokka: skýrandi (fræðilegar) og lýsandi (byggðar einungis á athugun gagna). Í fyrra tilfellinu er lögun og þróun vaxtarófsins lýst með líkönum, venjulega slembidiffurjöfnum (Björk, 1998), sem eru háðar ákveðnum breytum. Bestunaraðferðir eru síðan notaðar til að kvarða líkönin út frá markaðsgögnum. Lýsandi aðferðir byggjast ekki á neinu líkani fyrir vaxtarófið (Anderson, Breedon, Deacon, Derry og Murphy, 1996, eða Bolder og Stréliski, 1999). Þær leitast einungis við að gefa nákvæma lýsingu á lögun vaxtarófsins á hverjum tíma með greiningu markaðsgagna. Engar tilgátur eru gerðar að því er varðar tímaþróun vaxtarófsins.

Í þessari grein ræðum við vaxtaróf mismunandi tegunda vaxta. Við notum lýsandi aðferðir til að sýna hvernig mismunandi vaxtaróf tengjast verði skuldabréfa og sín á milli. Athugunin beinist einungis að greiningu áhættulauss nafnvaxtarófs íslenska markaðarins. Við ræðum aðferðir til að setja saman nafnvaxtarófið og notum til þess markaðsupplýsingar fyrir óverðtryggð skuldabréf. Við notum upplýsingar af peningamarkaði, nánar tiltekið REIBOR-vexti, til að smíða stutta enda nafnvaxtarófsins. Í annarri grein lítum við á tengslin á milli nafnvaxta og raunvaxta og þær upplýsingar sem þau veita um verðbólguvæntingar markaðarins.

Á litlum mörkuðum, þar sem verslun með vaxtaverkfæri[3] er takmörkuð og bundin við tiltölulega fá skuldabréf, getur verið erfitt að lesa áreiðanlegar og sjálfum sér samkvæmar upplýsingar út úr markaðnum (Subramanian, 2001). Einnig er algengt að misræmi sé á milli verðs mismunandi verkfæra og því geta áhættulausir hagnaðarmöguleikar verið fyrir hendi, fyrirbæri sem tiltölulega vanþroskaðir og tregir markaðir ná ekki ætíð að greina og fjarlægja.

Við athugum sérstaklega möguleika þess að setja saman vaxtaróf fyrir trega markaði með notkun fárra vaxtaverkfæra. Þetta er sérstaklega mikilvægt fyrir íslenska markaðinn þar sem brúun á milli fárra vaxtapunkta er algengt vandamál og ekki sjálfgefið að hægt sé að grípa til annarra vaxtaverkfæra við brúunina. Við athugum notkun mismunandi splæsiaðferða og þá sérstaklega þvinguð splæsiföll (e. *constrained splines*) (de Boor, 2004). Hér snýst vandamálið fyrst og fremst um það að finna jafnvægi á milli góðrar nálgunar gefinna skuldabréfa og þess að smíða þjált vaxtaróf. Mikilvægt er að velja vægið á milli þessara tveggja ósamræmanlegu markmiða þannig að framvirka vaxtarófið verði ekki of sveiflukennt. Of mikið flökt í framvirkum vöxtum getur kippt fótunum undan raunhæfri verðlagningu á vaxtaafleiðusamningum.

Skipulag greinarinnar er eftirfarandi: Við byrjum á því að ræða hlutverk affallabréfa við samsetningu vaxtarófsins. Í framhaldi af því innleiðum við framvirka vexti og framvirka augnabliksvexti og sýnum hvernig þeir tengjast verði affallabréfa. Því næst athugum við vaxtagreiðslubréf og ræðum aðferðir sem nota markaðsverð þeirra til að smíða vaxtaróf fyrir tímabundna og framvirka vexti. Sérstök áhersla er lögð á vandamálin við að smíða samfellt vaxtaróf út frá fáum vaxtagreiðslubréfum. Við ræðum bootstrapping, aðferð minnstu fervika og línulega ítrekun. Eins ræðum við nokkuð ýtarlega notkun splæsiaðferða

3 Vaxtaverkfæri eru hvers konar bréf sem verslað er með á markaði og er verðþróun þeirra háð þróun vaxta. Hugtakið er almennt og getur átt við skuldabréf og önnur vaxtabréf, skiptasamninga, vaxtaafleiðusamninga og fjölda annarra verkfæra.

til að smíða þjált vaxtaróf út frá takmörkuðum og strjálum fjölda vaxtapunkta. Sérstök áhersla er lögð á það að finna rétt jafnvægi á milli þess að smíða þjált vaxtaróf, sem einnig lágmarkar ferningsmismun markaðsverðs og reiknaðs verðs skuldabréfa. Við notum síðan aðferðirnar sem ræddar eru í fyrri hluta greinarinnar og markaðsverð óverðtryggðra ríkisskuldabréfa til að smíða nafnvaxtarófið fyrir íslenska markaðinn. Í þessum tilgangi notum við REIBOR-vexti til að smíða skammtímahluta vaxtarófsins. Greininni lýkur með samantekt. Nokkur tæknileg atriði, eins og aðferðir til að fækka óháðum stærðum, eru ræddar í viðauka.

2. Affallabréf og mismunandi framsetning vaxtarófsins

Vaxtarófinu er oft lýst með samfellt reiknuðum vöxtum $R(t,T)$, sem gilda á tíma t (í dag) til framtíðar tímans T. Við notum hugtakið tímabundnir vextir (e. *spot rate*) fyrir $R(t,T)$, þar sem þetta eru þeir vextir, sem gilda á tíma t, yfir tímabilið $T-t$. Með vaxtarófi er átt við fallið $T \rightarrow R(t,T)$ þar sem T spannar tímabilið frá því í dag, tíma t, til einhvers framtíðartíma T_{max}. Vitanlega er engin leið að þekkja $R(t,T)$ fyrir öll möguleg gildi á T, heldur einungis fyrir tiltölulega fá og strjál gildi, sem eru reiknuð út frá verði vaxtaverkfæra, fyrst og fremst skuldabréfa. Eftir að búið er að finna tímabundna vexti fyrir strjált tímamengi T= $\{T_{min},\ldots,T_{max}\}$, þarf að brúa bilin á milli tímanna til að fá samfellt vaxtaróf. Slíkt er hægt að gera á marga vegu, en sú aðferð sem fyrir valinu verður ræðst oft af því hver tilgangurinn er með því að setja saman vaxtarófið.

Greining vaxtarófsins hefst venjulega með athugun á áhættulausum affallabréfum, sem borga eina nafneiningu gjaldmiðils (eina krónu) á gjalddaga T. Verð affallabréfsins á tíma t $(t<T)$ er:

$$(1) \qquad D(t,T) = \exp\left(-(T-t)R(t,T)\right),$$

þar sem $R(t,T)$ eru tímabundnir vextir, sem gilda á tíma t, fyrir tímabilið $T-t$. $D(t,T)$ er því afvöxtunarþátturinn, sem er notaður til að núvirða eina einingu gjaldmiðils, sem greiðist eftir $T-t$ ár. Ef markaðurinn á viðskipti með N áhættulaus affallabréf með mismunandi gjalddaga, $T_1,T_2,\ldots,T_N$, er mögulegt að nota verð þeirra til að smíða vaxtaróf fyrir allt tímabilið sem gjalddagarnir spanna:

$$(2) \qquad R(t,T_i) = \frac{-1}{(T_i-t)}\log D(t,T_i) \ ; \ i=1,2,\ldots,N.$$

Ef $T_{\min} = \min_{1\le i\le N} T_i$ og $T_{\max} = \max_{1\le i\le N} T_i$ er vaxtarófið, sem finnst út frá verði affallabréfanna á tíma t:

$$(3) \qquad \Re(t;T_{\min},T_{\max}) = \{R(t,T) | T \in [T_{\min},T_{\max}]\}.$$

Á flestum mörkuðum er ekki verslað með mikinn fjölda affallabréfa og því er framlag þeirra til smíða vaxtarófsins oft takmarkað. Gjalddagar bréfanna eru venjulega strjálir og mislangt á milli þeirra og því er nauðsynlegt að brúa bil þeirra með viðeigandi brúunaraðferðum. Niðurstaðan fer bæði eftir því hversu langt er á milli punktanna og hvaða aðferð er beitt, en hér eru ýmsir möguleikar fyrir hendi. Oft er þó nauðsynlegt að nota að auki vaxtagreiðslubréf til að fá góða mynd af vaxtarófinu.

Út frá samfellt reiknuðum tímabundnum vöxtum er hægt að leiða út mismunandi tegundir vaxta, sem hver um sig gegnir mikilvægu hlutverki við greiningu og verðlagningu vaxtaverkfæra. Við byrjum á því að athuga s.k. framvirka vexti, $F(t,T_k,T_{k+1})$, þ.e.a.s. vexti, sem ákvarðaðir eru í dag (á tíma t) fyrir framtíðartímabilið frá T_k til T_{k+1}. Framvirka vexti er hægt að leiða út frá tímabundnum vöxtum og þar af leiðandi verði affallabréfa, ef gert er ráð fyrir fjarvist mislægs verðs (e. *absence of arbitrage opportunities*). Niðurstaðan er[4]:

$$(4) \qquad F(t,T_k,T_{k+1}) = \frac{1}{T_{k+1}-T_k}\log\left(\frac{D(t,T_k)}{D(t,T_{k+1})}\right).$$

Af þessu leiðir að við getum sett saman vaxtaróf fyrir framvirka vexti út frá verði affallabréfa á svipaðan hátt og fyrir tímabundna vexti, en slíkt vaxtaróf er nauðsynlegt fyrir verðlagningu ýmissa vaxtaafleiðusamninga.

4 Jafna (4) finnst með því að nota tengslin $D(t,T_{k+1})=D(t,T_k)D(T_k,T_{k+1})$ og $D(T_k,T_{k+1})=\exp(-(T_{k+1}-T_k)F(t,T_k,T_{k+1}))$. Með því að einangra $F(t,T_k,T_{k+1})$ fæst jafna (4).

Framvirkir augnabliksvextir (*instantaneous forward rates*) finnast með því að taka eftirfarandi markgildi:

$$f(t,T) = \lim_{T_{k+1} \to T_k ; T_k = T} F(t, T_k, T_{k+1}) = -\frac{\partial}{\partial T}\left(\log D(t,T)\right). \quad (5)$$

Þetta eru einfaldlega framvirkir vextir, ákvarðaðir á tímanum *t*, (þ.e. í dag) sem gilda einungis í augnablik eftir framtíðartímann *T*. Af þessu leiðir að mögulegt er að skrifa verð affallabréfa sem eftirfarandi fall af framvirkum augnabliksvöxtum:

$$D(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,\tau)d\tau\right). \quad (6)$$

Framvirkir augnabliksvextir gegna mikilvægu hlutverki í s.k. HJM-líkönum (Heath, Jarrow og Morton, 1992), sem lögðu grunninn að nútíma markaðslíkönum (Brace, Gatarek og Musiela, 1997, Miltersen, Sandmann og Sondermann, 1997 og Jamshidian og Zhu, 1997).

Samanburður á jöfnum (1) og (6) gefur eftirfarandi tengsl á milli tímabundinna vaxta og framvirkra augnabliksvaxta:

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T f(t,\tau)d\tau \quad (7)$$

Þetta sýnir að tímabundnir vextir *R(t,T)* eru jafnir meðalgildi framvirkra augnabliksvaxtavaxta yfir tímabilið $T - t$.

Við getum umritað (7) á eftirfarandi hátt:

$$f(t,T) = R(t,T) + (T-t)\frac{\partial R(t,T)}{\partial T}. \quad (8)$$

Framvirku augnabliksvextirnir *f(t,T)* eru því sú jaðarávöxtun (e. *marginal rate of return*) sem fjárfestar krefjast fyrir að eiga bréf með gildistímann $T - t$.

Allar stærðirnar, *D(t,T), R(t,T) og f(t,T)*, gefa jafngilda lýsingu á vaxtarófinu. Eftir að búið er að setja saman „rófið“ fyrir einhverja af þessum stærðum er auðvelt að varpa því yfir á róf hinna stærðanna, en út frá *D(t,T)* eða *R(t,T)* finnum við síðan framvirku vextina.

3. Vaxtagreiðslubréf

Vegna takmarkaðs framboðs og lítillar fjölbreytni í líftíma duga affallabréf venjulega ekki til að setja saman umfangsmikið vaxtaróf á áreiðanlegan hátt. Sú staðreynd er sérstaklega viðeigandi hér á landi. Þar af leiðandi þarf að grípa til vaxtagreiðslubréfa. Það er vissulega erfiðara að smíða vaxtarófið með vaxtagreiðslubréfum en með affallabréfum. Hér þarf að greina í sundur afvöxtunarþætti fyrir mislangar greiðslur hvers bréfs, en til þess þarf safn jafn áhættusamra bréfa með mislangan líftíma. Árangurinn fer eftir fjölda þeirra bréfa sem viðskipti eru með á viðkomandi markaði og innbyrðis tengslum bréfanna og vaxtagreiðslna af þeim. Þetta verður rætt nánar í 4. hluta þessarar greinar.

Við gerum ráð fyrir að á markaði séu *K* vaxtagreiðslubréf, þar sem hvert bréf $k \in K$ greiðir eftirfarandi vaxtarunu: $C_k = C_{k,T_1^{(k)}}, C_{k,T_2^{(k)}}, \ldots, C_{k,T_{N_k}^{(k)}}$, á tímunum. Með síðustu vaxtagreiðslunni, á tíma $T_{N_k}^{(k)}$, greiðir hvert bréf *k* einnig höfuðstólinn Q_k. Verð bréfs *k* á tíma *t* þarf að fullnægja:

$$\hat{P}_k(t) = \sum_{i=1}^{N_k} C_{k,T_i^{(k)}} D\left(t, T_i^{(k)}\right) + Q_k D\left(t, T_{N_k}^{(k)}\right) \; ; \quad 1 \leq k \leq K. \quad (9)$$

Við setjum „^” yfir $P_k(t)$ til að leggja áherslu á að þetta er áætlað verð bréfanna. Ef markaðsverð bréfanna er $P_k(t)$ er reynt að velja afvöxtunarþættina þannig að $\hat{P}_k(t) \cong P_k(t)$.

Fjárstreymisfylkið $C_{k,T_i^{(k)}}, 1 \leq k \leq K, 1 \leq i \leq N_k$, hefur ævinlega *K* raðir, sem eru jafnar fjölda bréfanna. Fjöldi dálka fylkisins er jafn fjölda óþekktra afvöxtunarþátta $D\left(t, T_i^{(k)}\right)$, $1 \leq k \leq K, 1 \leq i \leq N_k$. Almennt eru það tengslin á milli fjölda raða og dálka sem hafa áhrif á það hversu vel gengur að ákveða afvöxtunarþættina. Eitt sértilfelli er að öll bréf safnsins greiði vexti á mismunandi tímum, þ.e. $T_i^{(k)} \neq T_j^{(l)}$, $\forall i, j \; og \; \forall k, l$. Í þessu tilfelli er stærð fjárstreymisfylkisins $S[C] = K \times \sum_{i=1}^{K} N_i$. Í raunveruleikanum borga þó mörg bréf vexti á sama tíma og því gildir að jafnaði $S[C] = K \times L$ með $L < \sum_{i=1}^{K} N_i$. Auðvelt er að sjá að minnsti mögulegi dálkafjöldi fjárstreymisfylkisins er $L_{\min} = \max_{k \in K} N_k$.

Jöfnu (9) er hægt að leysa með tilliti til lengstu tímabundnu vaxtanna, en þá fæst:

$$(10)\quad R\left(t,T_{N_k}^{(k)}\right)=\frac{1}{T_{N_k}^{(k)}-t}\log$$

$$\left[\frac{C_{k,T_{N_k}^{(k)}}+Q_k}{P_k(t)-\sum_{i=1}^{N_k-1}C_{k,T_i^{(k)}}\exp\left(-\left(T_i^{(k)}-t\right)R\left(t,T_i^{(k)}\right)\right)}\right];$$

$$1\le k\le K$$

Þetta sýnir ítrekunartengsl á milli tímabundinna vaxta því að mögulegt er að skrifa vexti fyrir ákveðið tímabil sem fall af vöxtum fyrir önnur skemmri tímabil. Þegar verð, höfuðstóll, vaxtagreiðslur og tímasetning þeirra eru þekkt sýnir jafnan hvernig hægt er að finna tímabundnu vextina $R\left(t,T_{N_k}^{(k)}\right)$ ef skemmri tímabundnir vextir, fyrir tímana $T_1^{(k)},T_2^{(k)},...,T_{N_k-1}^{(k)}$ eru þekktir. Sumir þessara vaxta eru fundnir með athugun affallabréfa eða annarra vaxtagreiðslubréfa. Eins er mögulegt að nota verkfæri, sem verslað er með á peningamarkaði, fyrir skammtíma hluta vaxtarófsins. Eftir að öll möguleg markaðsgögn hafa verið notuð er brúað á milli þekktra vaxtapunkta til að fá samfellt vaxtaróf.

Flestar aðferðir til að smíða vaxtaróf með notkun vaxtagreiðslubréfa eru byggðar á þessari aðferðafræði, sem engu að síður er ekki án vandkvæða. Helstu vandamálin, sem við stöndum frammi fyrir á íslenska markaðnum, eru takmarkaður fjöldi vaxtaverkfæra og á tíðum tiltölulega treg viðskipti með þann litla fjölda sem er til staðar. Þetta á sérstaklega við um óverðtryggð skuldabréf, en markaðurinn fyrir verðtryggð skuldabréf er talsvert virkur og umfangsmikill.

4. Bootstrapping

Ef höfuðstóllinn er tekinn inn í síðustu vaxtagreiðslu getum við skrifað jöfnu (9) sem eftirfarandi fylkjajöfnu:

$$(11)\qquad P=CD.$$

Fyrir K skuldabréf er hér um að ræða K jöfnur. Ef fjöldi óþekktra $D(t,T_j^{(k)})$, er jafn fjölda jafna (skuldabréfa) og ef mögulegt er að skrifa fjárstreymið sem neðra þríhyrningsfylki er hægt að finna alla afvöxtunarþættina og út frá þeim tímabundnu vextina (vaxtarófið). Jafna (11) verður því:

$$(12)\quad \begin{pmatrix}P_1\\P_2\\ \\ \\P_K\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_{1,1} & 0 & & 0\\ C_{2,1} & C_{2,2} & & \\ & & & \\ & & & \\ C_{K,1} & & & C_{K,K}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D_1\\D_2\\ \\ \\D_K\end{pmatrix},$$

þar sem:

$$(13)\quad C_{k,i}=C_{k,T_i}\ ;\ D_i=D(t,T_i)\ ;\ T_i^{(k)}=T_i^{(l)}=T_i\ ;\ \forall k,l,$$

þ.e.a.s. öll skuldabréf borga vexti á sama tíma. Í þessu tilfelli er hægt að finna fyrsta afvöxtunarþáttinn beint:

$$(14)\qquad D_1=P_1/C_{1,1}.$$

Lausnin fyrir aðra afvöxtunarþætti finnst síðan út frá eftirfarandi ítrekunarformi:

$$(15)\qquad D_k=\frac{P_k-\sum_{i=1}^{k-1}C_{k,i}D_i}{C_{kk}}.$$

Síðan er jafna (2) notuð til að finna tímabundnu vextina. Við sýnum hvernig þessi aðferðafræði er notuð með því að skoða dæmi.

4.1 Dæmi

Í þessu dæmi höfum við 20 skuldabréf. Tvö bréfanna eru affallabréf, sem renna út eftir hálft ár (fyrsta bréfið) og eitt ár (annað bréfið). 18 bréfanna eru vaxtagreiðslubréf með lengd frá einu og hálfu ári upp í 10 ár, þar sem vextir eru greiddir tvisvar á ári. Nauðsynlegar upplýsingar um skuldabréfin eru teknar saman í fyrstu þremur dálkunum í töflu 1 (Fabozzi, 2001), en þrír síðustu dálkarnir eru reiknaðir út frá þessum upplýsingum.

Út frá upplýsingunum í töflu 1 er hægt að setja saman 20 x 20 fjárstreymisfylki sem hefur engin tölugildi ofan við hornalínu fylkisins. Fyrstu tvö affallabréfin nýtast til að finna fyrstu tvo affallaþættina, $D(0,0.5)$ og $D(0,1.0)$. Allir aðrir afvöxtunarþættir finnast síðan með síendurtekinni notkun jöfnu (15). Niðurstöðurnar eru gefnar í fjórða dálki

Tafla 1

Fyrsti dálkur sýnir lengd hvers skuldabréfs. Annar dálkur sýnir vexti (og þar með vaxta-greiðslur af bréfunum) og þriðji dálkur markaðsverð skuldabréfanna. Fjórði dálkur sýnir afvöxtunarþætti fyrir gefna tímalengd (úr fyrsta dálki). Fimmti dálkur sýnir samfellt reiknaða tímabundna vexti og sjötti dálkur ósamfellt (tvisvar á ári) reiknaða tímabundna vexti.

Lengd [ár]	*Vextir*	*Verð*	*Afv. þátt.*	*NV (sam.)*	*NV (ósam.)*
0,50	0,0000	96,15	0,96150	0,078521	0,08008
1,00	0,0000	92,19	0,92190	0,081319	0,082994
1,50	0,0850	99,45	0,87718	0,087365	0,089302
2,00	0,0900	99,64	0,83462	0,090392	0,092465
2,50	0,1100	103,49	0,79352	0,09251	0,094683
3,00	0,0950	99,49	0,75077	0,9555	0,097869
3,50	0,1000	100,00	0,70764	0,098804	0,10129
4,00	0,1000	98,72	0,66176	0,10321	0,10592
4,50	0,1150	103,16	0,62160	0,10566	0,10850
5,00	0,0875	92,24	0,58485	0,10728	0,11021
5,50	0,1050	98,38	0,54988	0,10874	0,11175
6,00	0,1100	99,14	0,50883	0,11261	0,11584
6,50	0,0850	86,94	0,47626	0,11412	0,11744
7,00	0,0825	84,24	0,44257	0,11645	0,11991
7,50	0,1100	96,09	0,40549	0,12035	0,12405
8,00	0,0650	72,62	0,38548	0,11916	0,12278
8,50	0,0875	82,97	0,35548	0,12168	0,12546
9,00	0,1300	104,30	0,31779	0,12737	0,13152
9,50	0,1150	95,06	0,29226	0,12948	0,13377

í töflu 1. Tveir síðustu dálkarnir sýna tímabundnu vextina, sem reiknaðir eru út frá afvöxtunarþáttum fjórða dálks. Fimmti dálkur sýnir samfellt reiknaða vexti (sam.) og sjötti dálkur ósamfellt reiknaða vexti (tvisvar á ári, ósam.). Tengslin á milli tveggja síðustu dálkanna eru gefin með jöfnunni:

$$r_s = k \log\left(1 + \frac{r_k}{k}\right), \tag{16}$$

þar sem r_s stendur fyrir samfellt reiknaða vexti og r_k fyrir ósamfellt reiknaða vexti, k sinnum á ári. Í þessu dæmi er $k = 2$.

Hér að ofan sáum við hvernig hægt er að smíða vaxtarófið með hjálp ítrekunarjafna þar sem fjár-streymisfylkið er neðra þríhyrningsfylki. Undir flestum kringumstæðum er áðurnefnt fylki hins vegar ekki svo einfalt. Ítrekunaraðferðin „rofnar" því vegna skorts á ílagsgögnum (e. *input data*).

Vandamálið er venjulega leyst með því að nota þau bréf sem eru til staðar til að búa til „gerviskulda-bréf" með þá lengd sem vantar. Til þess að ná slíku takmarki er nauðsynlegt að taka á sama tíma langa og skamma eignarstöðu í mismunandi bréfum. Hvernig slíkt er gert er best lýst með dæmi.

4.2 Dæmi

Við athugum sértilfelli sem hefur eftirfarandi fjár-streymisfylki:

$$\begin{array}{ccccc} t & T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \\ P_1 & C_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ P_2 & C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} & 0 \\ P_3 & C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} & 0 \\ P_4 & C_{4,1} & C_{4,2} & C_{4,3} & C_{4,4} \end{array} \tag{17}$$

Hér eru til staðar fjögur skuldabréf og er markaðsverð þeirra á tíma t sýnt í fyrsta dálki. Fyrsta bréfið er affallabréf sem rennur út á tíma T_1. Annað bréfið greiðir vexti á tímunum T_1, T_2 og T_3 og svo framvegis. Í þessu tilfelli er ekki hægt að nota fjárstreymisfylkið beint til að finna afvöxtunarþáttinn $D(t,T_2)$. Með öðrum orðum, við getum ekki notað jöfnu (15) beint. Við notum því nokkur skuldabréfanna til að búa til gerviskuldabréf sem greiðir síðustu greiðslu á tíma T_2. Þetta bréf, sem við skulum kalla Π, er hægt að búa til með langri stöðu í skuldabréfi 2 og stuttri stöðu í skuldabréfi 3 á eftirfarandi hátt:

$$\Pi = C_{3,3}P_2 - C_{2,3}P_3 = \left(C_{3,3}C_{2,1} - C_{2,3}C_{2,1}\right) D(t,T_1) + \left(C_{3,3}C_{2,2} - C_{2,3}C_{3,2}\right) D(t,T_2) \tag{18}$$

Við getum nú notað fyrsta skuldabréfið til að finna $D(t,T_1)$ og síðan bréfið Π til að finna $D(t,T_2)$:

$$D(t,T_2) = \frac{\Pi - \left(C_{3,3}C_{2,1} - C_{2,3}C_{3,1}\right) D(t,T_1)}{\left(C_{3,3}C_{2,2} - C_{2,3}C_{3,2}\right)}. \tag{19}$$

Eftir þetta getum við notað annað og þriðja bréfið til að finna $D(t,T_3)$ og að síðustu fjórða bréfið til að finna $D(t,T_4)$.

Hægt er að gera þessa aðferð almenna og beita henni á önnur fjárstreymisfylki, sem ekki leyfa beina hagnýtingu ítrekunaraðferða. Aðferðin finnur venjulega jafnmarga afvöxtunarþætti og skuldabréfin eru mörg og miðast hver afvöxtunarþáttur við lokatíma hvers bréfs.

5. Brúun milli þekktra punkta

Við höfum séð hvernig hægt er að nota bootstrapping til að finna afvöxtunarþætti tímapunkta sem svara til gjalddaga skuldabréfa. Út frá afvöxtunarþáttunum getum við síðan fundið tímabundnu vextina fyrir sömu tíma. Til þess að smíða samfellt vaxtaróf er hins vegar nauðsynlegt að brúa á milli þessara punkta.

Einfaldast er að nota línulega brúun sem hefur þó þann ókost að geta leitt til óstöðugleika í framvirkum vöxtum. Annar möguleiki er að „þræða á milli" þekktra punkta með margliðu af tilteknu stigi eða jafnvel að nota mismunandi margliður til að tengja alla nærliggjandi punkta. Endanleg lögun vaxtarófsins fer eftir því hvaða aðferð er notuð.

Eftir að ákveðið hefur verið hvaða bréf verða notuð fer lögun vaxtarófsins mest eftir því hvaða lausnartilgáta er notuð fyrir afvöxtunarþáttinn $D(t,T)$, en hér þarf að finna hæfilegt jafnvægi á milli þess að smíða vaxtaróf sem gefur nákvæmlega verð notaðra bréfa og þess að smíða þjált vaxtaróf. Með öðrum orðum, nauðsynlegt er að ná réttu jafnvægi á milli lágmarksskekkju í verðlagningu og þjállar lögunar vaxtarófsins. Með tilliti til verðlagningar vaxtaverkfæra, annarra en þeirra sem notuð voru til að smíða vaxtarófið, er æskilegt að framvirka vaxtarófið sé samfellt, en þó þannig að það sé í eins góðu samræmi við undirliggjandi gögn og mögulegt er. Þar sem hátterni framvirka vaxtarófsins er mjög næmt fyrir breytingum á tímabundnum vöxtum er nauðsynlegt að ná vaxtarófi þeirra eins þjálu og stöðugu og unnt er. Við ræðum nú mismunandi leiðir að þessu takmarki með sérstöku tilliti til íslenska skuldabréfamarkaðarins.

Til að brúa bilið á milli strjálla og samfelldra vaxtapunkta gerum við ráð fyrir því að hægt sé að liða (e. *expand*) afvöxtunarþáttinn $D(t,T)$. Við sýnum hvernig, með slíkri liðun, er hægt að varpa jöfnu (11), sem gefur lausnir fyrir afvöxtunarþættina $D(t,T_1)$,$D(t,T_2)$,...,$D(t,T_N)$, yfir á aðra jöfnu fyrir stuðla, sem tengjast liðun afvöxtunarþáttanna. Þessi leið er farin með því að notast við aðferð minnstu fervika.

Gert er ráð fyrir að markaðsverð notaðra bréfa sé P_k ; $k = 1,2,..,K$. Verð bréfanna þarf að fullnægja eftirfarandi jöfnu (hér höfum við tekið höfuðstólinn inn í síðustu vaxtagreiðsluna):

$$\hat{P}_k(t) = \sum_{i=1}^{N_k} C_{k,T_i^{(k)}} D\left(t,T_i^{(k)}\right) \; ; \; 1 \le k \le K \tag{20}$$

Með því að bera þessa nálgun saman við markaðsverð bréfanna reynum við að ákvarða afvöxtunarþættina og tímabundnu vextina út frá þeim. Afvöxtunarþátturinn $D(t,T)$ er fall af tíma auk annarra breytistærða, en fjöldi þeirra fer eftir því hvaða aðferð er notuð (sjá viðauka). Í öllum tilfellum er breytistærðunum hnikað til uns eftirfarandi ferningssumma hefur verið lágmörkuð:

(21) $$\Omega(t)=\sum_{k=1}^{K}\left(P_k(t)-\hat{P}_k(t)\right)^2 .$$

Þessi lágmörkun á sér stað að gefnum eftirfarandi ójöfnuskilyrðum:

(22) $$1>D\left(t,T_1^{(k)}\right)>D\left(t,T_2^{(k)}\right)>\ldots,D\left(t,T_{N_k}^{(k)}\right)>0 \; ; \quad k\in\{1,\ldots\ldots,K\}$$

Með því að lágmarka stærðina Ω má finna afvöxtunarþætti, sem gefa bestu nálgun á verði skuldabréfanna, en slík nálgun getur hins vegar leitt til óþjáls vaxtarófs. Ástæðurnar fyrir þessu eru mismunandi, en þær helstu eru:

- Fæð skuldabréfa
- Tregur markaður í sumum bréfum
- Kostir eða ókostir við að eiga sum bréf, t.d. vegna skattlagningar, möguleika á innköllun o.fl.
- Mismunandi áhætta bréfanna

Hér verður að vega og meta hvaða bréf er rétt að nota við samsetningu vaxtarófsins og hvort vægi þeirra bréfa, sem notuð eru, eigi að vera jafnt. Lausnartilgátan sem notuð er fyrir lögun afvöxtunarþátta hefur einnig áhrif á endanlega lögun vaxtarófsins. Við skoðum nokkur dæmi.

5.1. Línuleg liðun

Við gerum fyrst ráð fyrir því að afvöxtunarþátturinn hafi eftirfarandi lögun:

(23) $$D(t,T)=\sum_{j=1}^{L}a_j\Psi_j(t,T),$$

þar sem Ψ_j er þekkt fall af t og T. Í þessu tilfelli gefur jafna (21):

(24) $$\Omega(t)=\sum_{k=1}^{K}\left(P_k(t)-\sum_{i=1}^{N_k}\sum_{j=1}^{L}C_{k,T_i^{(k)}}a_j\Psi_j\left(t,T_i^{(k)}\right)\right)^2$$

Til þess að lágmarka þessa stærð tökum við afleiður með tilliti til $a_1,a_2,\ldots,a_L$ og setjum þær jafnt og núll. Þetta leiðir til eftirfarandi fylkisjöfnu, sem stærðirnar $a_1,a_2,\ldots,a_L$ þurfa að uppfylla:

(25) $$\mathrm{M}a=b\,,$$

þar sem:

(26) $$\mathrm{M}_{j,l}=\sum_{k=1}^{K}\Phi_{k,l}\left(t,T^{(k)}\right)\Phi_{k,j}\left(t,T^{(k)}\right) \; ; \; 1\le j,l\le L$$
$$b_l=\sum_{k=1}^{K}P_k(t)\Phi_{k,l}\left(t,T^{(k)}\right) \; ; \; 1\le l\le L$$

og

(27) $$\Phi_{k,l}\left(t,T^{(k)}\right)=\sum_{i=1}^{N_k}C_{k,T_i^{(k)}}\Psi_l\left(t,T_i^{(k)}\right) \; ; \quad 1\le k\le K \; ; \; 1\le l\le L .$$

Allar stærðir á hægri hlið síðustu jöfnu eru þekktar og þar af leiðandi allir stuðlar fylkisins M. Eins eru öll verð $P_k(t)$ þekkt og þar af leiðandi allir þættir vektorsins b. Undir þessum kringumstæðum er mögulegt að leysa jöfnu (25) og finna stærðirnar $a_1,a_2,\ldots,a_L$. Með því að setja þær aftur inn í (23) finnum við fallaform (e. *functional form*) fyrir afvöxtunarþáttinn $D(t,T)$.

5.2. Margliðuaðlögun

Margliðuaðlögun felst í því að nota eina margliðu, oftast af háu stigi, til að nálga allt vaxtarófið. Hér er gert ráð fyrir því að hægt sé að skrifa afvöxtunarþættina sem margliðu af N_{ta} stigi (McCulloch, 1971, og Chambers, Carleton og Waldman, 1984).

(28) $$D(T)=\sum_{j=0}^{N}a_jT^j$$

Ýmis vandamál eru í tengslum við þessa aðferð, sérstaklega sú staðreynd að oft er bilið á milli tímapunktanna misjafnlega langt. Slíkt leiðir til þess að eitt tímabil vaxtarófsins er betur nálgað en önnur tímabil. Oft er mögulegt að bæta þetta með því að hækka stig margliðunnar, en slíkt leiðir iðulega til óstöðugleika.

Lausnin á þessu vandamáli (McCulloch, 1975) felst í því að notast ekki við eina margliðu fyrir allt vaxtarófið heldur beita mismunandi margliðum fyrir mismunandi tímabil og tengja síðan margliður nærliggjandi tímabila saman. Þetta leiðir til splæsifalla, sem nú verða rædd (sjá ítarlegri umfjöllun í de Boor, 2004).

6. Splæsibrúun

Grundvallarhugmynd splæsibrúunar er að nota mismunandi margliður fyrir mismunandi tímabil vaxtarófsins. Við göngum út frá eftirfarandi punktum $(x_i,y_i);i = 1,2,...,N$, þar sem x-hnitin eru t.d. mismunandi framtíðartímar og y-hnitin tilsvarandi gildi s.s. afvöxtunarþættir eða framvirkir vextir. Við látum Q vera fallið sem tengir saman x- og y- hnitin, $Q(x_i) = y_i;i = 1,2...,N$. Hugmyndin að baki splæsibrúun er að brúa bilið á milli punktanna með því að gera ráð fyrir að fallið Q sé margliða á hverju bili, $[x_i,x_{i+1});i = 1,2,...,N-1$. Við setjum því:

$$(29)\quad Q(x) = q_i(x)\ ;\ x_i \le x < x_{i+1}\ ;\ i = 1,2,...,N-1$$

Í þessari grein gerum við ráð fyrir því að margliðurnar séu af þriðja stigi á öllum bilum sem þarf að brúa. Mismunurinn frá bili til bils felst því í mismunandi stuðlum margliðunnar. Þar af leiðandi höfum við:

$$(30)\quad q_i(x) = \alpha_i(x-x_i)^3 + \beta_i(x-x_i)^2 + \gamma_i(x-x_i) + \delta_i\ ;\ x_i \le x < x_{i+1}\ ;\ i = 1,2,...,N-1$$

Til að finna margliðuna fyrir hvert bil er nauðsynlegt að ákveða stuðlana α_i, β_i, γ_i og δ_i. Þegar því takmarki er náð höfum við brúað öll bilin milli punktanna $(x_i,y_i);i = 1,2,...,N$. Til þess að tengja margliðurnar saman þarf viðbótarskilyrði þar sem margliðurnar mætast. Þessi skilyrði leiða til tengsla sem gera ákvörðun fastanna α_i, β_i, γ_i og δ_i mögulega.

Algengast er að gera kröfu um að splæsiföllin sjálf, ásamt fyrstu og annarri afleiðu þeirra, séu samfelld þar sem margliðurnar mætast. Þessum skilyrðum er fullnægt ef eftirfarandi gildir:

$$(31a)\quad q_i(x_i) = q_{i-1}(x_i)$$

$$(31b)\quad q_i'(x_i) = q_{i-1}'(x_i)$$

$$(31c)\quad q_i''(x_i) = q_{i-1}''(x_i).$$

Hér þýða merkin ′ og ′′ fyrsta og önnur afleiða með tilliti til x. Út frá skilyrðum (31a) og þeirri kröfu að splæsifallið fari í gegnum alla punktana fæst að:

$$q_i(x_i) = y_i = \delta_i$$

$$(32)\quad \delta_i = \alpha_{i-1}(x_i - x_{i-1})^3 + \beta_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + \gamma_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + \delta_{i-1}.$$

Krafan um þjálni (31b og 31c) leiðir til eftirfarandi tengsla:

$$(33)\quad \gamma_i = 3\alpha_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + 2\beta_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + \gamma_{i-1}$$
$$\beta_i = 3\alpha_i(x_i - x_{i-1}) + \beta_{i-1}.$$

Í jöfnu (30) eru óþekktar stærðir, α_i, β_i, γ_i og δ_i. Skilyrðin fyrir fyrstu og aðra afleiðu í (31) þurfa einungis að gilda í innri punktum tímabilsins. Fjöldi innri punkta er $N-2$ og því felur (31b,c) í sér $2(N-2)$ skilyrði. Samfelluskilyrðin (31a) þurfa hins vegar að gilda í öllum $(N-1)$-punktunum. Samtals gefur þetta okkur einungis $2(N-2) + 2(N-2) = 4N-6$ jöfnur, tveimur færri en óþekktar stærðir. Til að bæta úr þessu verður að innleiða tvö viðbótarskilyrði. Tvær mismunandi splæsiaðferðir, sem byggjast á mismunandi jaðarskilyrðum, eru algengar, en þær eru skilgreindar á eftirfarandi hátt (de Boor, 2004):

- Með því að þvinga aðra afleiðu við endapunkta til að vera núll fæst s.k. frjálst þriðja veldis splæsifall.
- Með því að krefjast þess að splæsiföllin séu hin sömu á fyrsta og öðru bilinu og á síðasta og næstsíðasta bilinu. Þetta leiðir til s.k. ekki-hnútur (e. *not-a-knot*) skilyrða.
- Þegar afleiðurnar á endapunktunum x_1 og x_N eru gefnar er talað um klemmd (e. *clamped*) skilyrði.

Bæði skilyrðin að ofan minnka fjölda óþekktra stærða um tvær og gera mögulegt að leysa jöfnur (32,33) fyrir alla fastana α_i, β_i, γ_i, δ_i.

Til viðbótar jaðarskilyrðunum að ofan (sem voru sett til að gera mögulegt að finna ótvíræða lausn fyrir stærðirnar, α_i, β_i, γ_i, δ_i) er mögulegt að innleiða fleiri skilyrði sem splæsiföllin þurfa að fullnægja. Við nýtum þennan möguleika til að stýra enn frekar heildarlögun splæsifallanna fyrir mismunandi markaðsgögn. Hvernig við veljum þessi viðbótarskilyrði fer eftir kringumstæðum hverju sinni. Rétt er að geta þess að engin augljós leið er fær til að ákveða eðli þessara skilyrða. Tvennt ræður þó mestu um það hvernig þau eru valin:

- Vaxtaverkfæri, sem ekki voru notuð til að setja vaxtarófið saman, en þurfa þó að samræmast vaxtarófinu;

- Viðbótarþvinganir, sem þykir eðlilegt að setja á vaxtarófið, sérstaklega framvirka vexti, vegna sveiflukenndrar hegðunar.

Skoðanir markaðarins og almennt fáanlegar upplýsingar geta haft áhrif á seinna atriðið, en mega þó ekki stangast á við verð vaxtaverkfæra sem verslað er með á markaði.

6.1. Mismunandi splæsiþvinganir

Við ræðum nú stuttlega þær splæsiþvinganir sem við beitum við greiningu vaxtarófs íslenska markaðarins. Frekari upplýsingar finnast í (de Boor, 2004).

Þriðja stigs splæsifall: Hefðbundin þriðja stigs splæsinálgun að gögnum. Krafist er samfelluskilyrða við hnúta þar sem nærliggjandi splæsivörp, ásamt fyrstu og annarri afleiðu þeirra, þurfa að vera samfelld. Jaðarskilyrðin geta annaðhvort verið frjáls eða ekki hnútur.

Bilskipt þriðja stigs hermískt brúunarfall: (e. *Piecewise Cubic Hermite Interpolating Polynomial* (PCHIP)). Hér er um að ræða þriðja stigs splæsinálgun sem varðveitir lögun punktanna (x,y), þ.e.a.s. á bilum þar sem gögnin eru einhalla er splæsifallið $q(x)$ einnig einhalla. Þetta næst með því að krefjast þess að fyrsta afleiða splæsifallanna sé samfelld í punktum á milli bila. Önnur afleiðan er hins vegar venjulega ekki samfelld í þessum punktum. Venjulegt þriðja stigs splæsifall er þjálla en PCHIP þar sem önnur afleiðan er gerð samfelld og þar af leiðandi gefur það betri mynd af gögnunum og truflunum sem geta verið í þeim. PCHIP er hins vegar stöðugra og leiðir síður til sveiflna, sem oftast eru mjög óæskilegar.

Þjálguð splæsiföll (e. *smooth splines*): Hér er um að ræða þjálgað þriðja stigs splæsifall, sem gegnir mikilvægu hlutverki við samsetningu vaxtarófa. Vegna mikilvægis þessarar aðferðar ræðum við hana nokkuð náið hér á eftir.

Einn helsti ókosturinn við notkun þriðja stigs splæsifalla er að þau leiða gjarnan til sveiflukennds vaxtarófs. Þetta á sérstaklega við um framvirku vextina. Mögulegt er að hafa nokkurn hemil á þessu fyrirbæri með því að innleiða kostnaðarfall með nokkurs konar refsilið. Iðulega er notast við refsilið sem er önnur afleiða af nálgunarfallinu og er því mælikvarði á sveigju vaxtarófsins. Ef refsiliðnum er bætt við upphaflega kostnaðarfallið (21) fæst nýtt kostnaðarfall (de Boor, 2004):

$$\hat{\Omega}(t) = \rho\Omega(t) + (1-\rho)\int_0^t Q''(\tau)d\tau \,. \tag{34}$$

Fyrri liðurinn reynir að lágmarka frávikið frá verði þeirra bréfa sem notuð eru til að smíða vaxtaferilinn, jafna (21). Seinni liðurinn reynir hins vegar að lágmarka aðra tímaafleiðu vaxtaferilsins, sem jafngildir því að lágmarka sveigju hans. Á þennan hátt er dregið úr óreglulegu eða sveiflukenndu hátterni vaxtaferilsins. Jafnvægið á milli þessara tveggja markmiða (samtíma lágmörkun skekkju og sveigju) stjórnast af stærðinni ρ, sem liggur á bilinu $0 \leq \rho \leq 1$. Ef $\rho = 0$ er einungis reynt að draga úr sveigjunni og ferillinn sem fæst er bein lína. Það leiðir venjulega til mikillar ónákvæmni. Ef hins vegar $\rho = 1$ er einungis reynt að lágmarka skekkju í verðlagningu og ferillinn getur orðið óreglulegur þar sem hann þræðir alla vaxtapunkta. Hugmyndin er að ferillinn, sem finnst með réttu vali á ρ, innihaldi eins miklar upplýsingar og mögulegt er án þess að taka tillit til truflana í gögnunum.

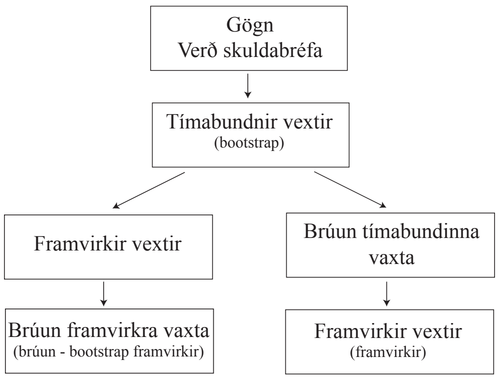
6.2 Mismunandi leiðir til að reikna framvirka vexti

Áður en við beitum umræddum splæsiaðferðum lýsum við tveimur mismunandi aðferðum sem við notum til að reikna framvirka vexti, mynd 1. Í báðum tilfellum byrjum við á því að nota bootstrap-aðferðir til að finna strjála vaxtapunkta út frá markaðsverði skuldabréfa.

Fyrsta aðferðin, sem er lýst á vinstri hlið á mynd 1, reiknar framvirka vexti beint út frá strjálum vaxtapunktum tímabundinna vaxta. Síðan eru tímabundnu vaxtapunktarnir og framvirku vaxtapunktarnir brúaðir hvor í sínu lagi með notkun mismunandi brúunaraðferða. Í þessu tilfelli tölum við um bootstrappað framvirkt vaxtaróf eða „brúun – bootstrap framvirkir“ (sjá texta með myndum). Í seinni aðferðinni, sem er lýst á hægri hlið á mynd 1, brúum við á milli strjálla tímabundinna vaxtapunkta, sem fundust með bootstrapping út frá markaðsverði skuldabréfa. Síðan finnum við framvirku vextina út frá samfellda tímabundna vaxtarófinu. Í þessu tilfelli tölum við einfaldlega um framvirkt vaxtaróf eða „framvirkir“ (sjá texta með myndum). Í mörgum tilfellum er munurinn á milli framvirku vaxtarófanna sem finnast með þessum tveimur aðferðum óverulegur, þótt nokkrar undantekningar geti verið á því, sjá seinna. Til að greina á milli mismunandi leiða til að reikna framvirka vexti notum við orðin í svigunum á mynd 1 sem texta með mörgum myndum seinna í greininni.

Mynd 1

Skýringarteikning fyrir tvær mismunandi leiðir til að reikna framvirka vexti út frá gefnum markaðsgögnum. Að jafnaði er óverulegur munur á niðurstöðunum



6.3 Dæmi

Áður en við snúum okkur að greiningu vaxtarófs íslenska markaðarins skoðum við tvö dæmi sem sýna greinilega mismunandi niðurstöður sem fást við notkun mismunandi splæsifalla.

Dæmi 1. Við lítum á tímabundna vexti og framvirka vexti sem spanna sex ára tímabil og eru gefnir í töflu 2. Framvirku vextirnir eru reiknaðir út frá tímabundnu vöxtunum með því að nota jöfnur (1) og (4). Með því að beita mismunandi aðferðum við brúun framvirku vaxtanna fáum við gröf með mismunandi lögun, háð því hvaða aðferð er notuð. Þetta er sýnt á mynd 2.

Mynd 2 sýnir niðurstöður fjögurra mismunandi aðferða, þriggja mismunandi splæsiaðferða og línulegrar brúunar. Augljóst er af þessu að hver aðferð leiðir til mismunandi lögunar fyrir fram-

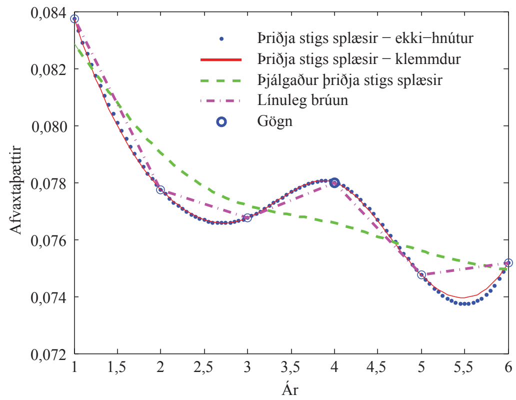
Tafla 2

Þriðji dálkur gefur upp framvirka vexti sem eru reiknaðir út frá tímabundnum vöxtum í miðdálki

Tími [ár]	*Tímabundnir vextir*	*Framvirkir vextir*
1	0,08375	0,08375
2	0,08175	0,07775
3	0,0805	0,07675
4	0,08	0,078
5	0,0785	0,07475
6	0,0775	0,075167

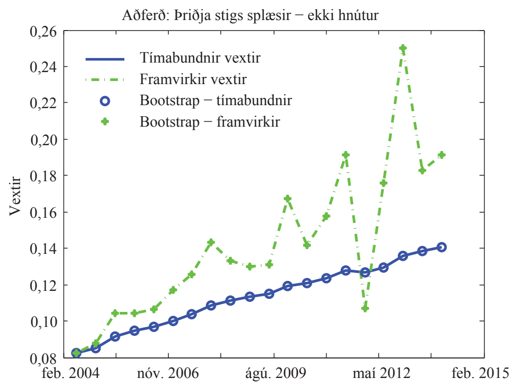
Mynd 2

Grögin sýna mismunandi brúun fyrir framvirku vextina í töflu 3



Mynd 3

Myndin sýnir tímabundnu vextina sem voru reiknaðir í töflu 1, ásamt framvirku vöxtunum sem eru reiknaðir út frá tímabundnu vöxtunum



virka vaxtarófið. Niðurstöðurnar sýna að mismunandi jaðarskilyrði fyrir splæsiföllin, ekki-hnútur og klemmdur (de Boor, 2004) hafa í þessu dæmi lítil áhrif á niðurstöðurnar. Allir ferlarnir, nema sá sem kemur frá notkun þjálgaðs splæsifalls, fara í gegnum gagnapunktana og samræmast því að fullu markaðsverði þeirra bréfa sem notuð voru við samsetningu vaxtarófsins. Munurinn á milli aðferðanna kemur fyrst og fremst til af því hvernig bilin á milli föstu punktanna eru fyllt. Það geta því verið önnur gögn, svo sem markaðsverð annarra verkfæra, sem styðja eina brúunaraðferð frekar en aðra.

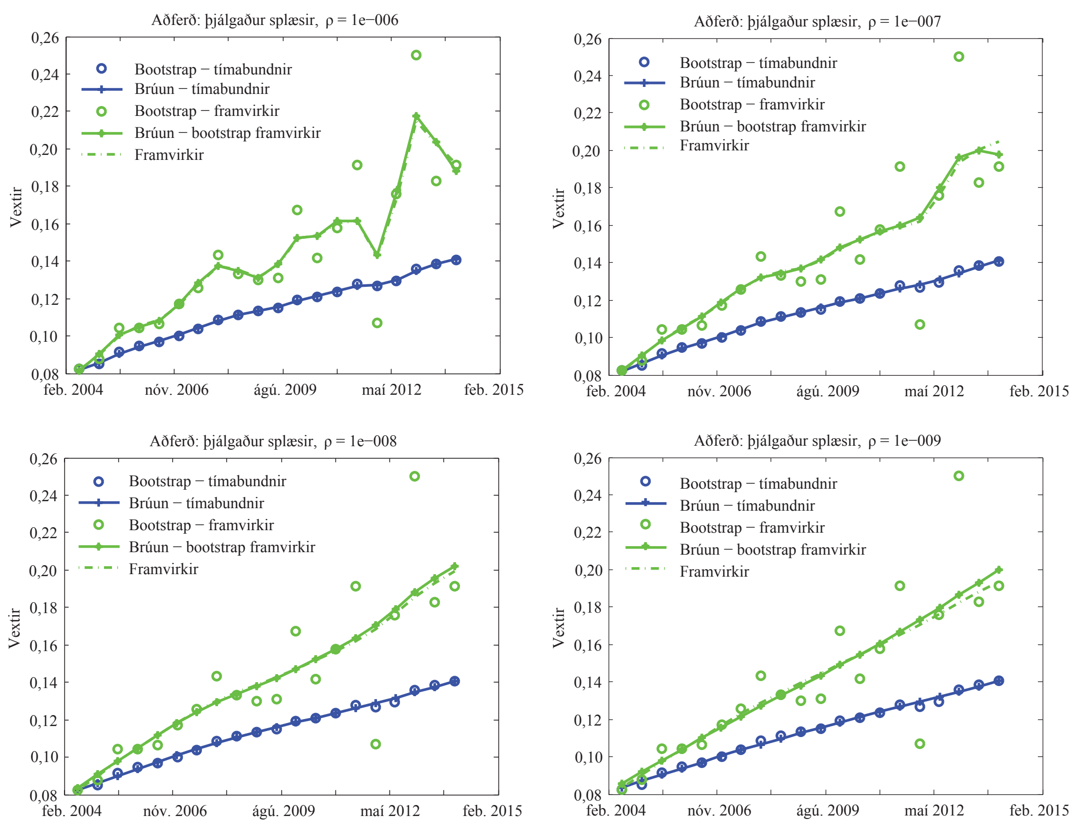
Dæmi 2. Við notum skuldabréfin sem gefin eru upp í töflu 1 (Fabozzi, 2001). Við beitum bootstrapping og síðan þriðja stigs splæsifalli. Mynd 3 sýnir niðurstöðurnar ef engri þjálgun er beitt. Vegna fjölda notaðra bréfa er nær enginn mismunur á milli línulegrar brúunar og notkunar mismunandi splæsiaðferða.

Augljóst er af niðurstöðunum á mynd 3 að framvirka vaxtarófið er mjög sveiflukennt. Það er ekki raunhæft að markaðsvæntingar um framtíðarvexti taki jafn miklum breytingum yfir jafn stutt tímabil og framvirka vaxtarófið segir til um. Í þessu tilfelli grípum við því til þess að beita þjálguðu splæsifalli til að draga úr þessum sveiflum.

Mynd 4 sýnir hvernig mögulegt er að finna þjálgaðra vaxtaróf fyrir framvirka vexti með því

Mynd 4

Tímabundnir og framvirkir vextir frá töflu 1
og mynd 3 fyrir fjóra mismunandi þjálgunarfasta



að beita þvingunaraðferðum í samræmi við (34). Við sýnum niðurstöður fyrir fjóra mismunandi þjálgunarfasta.

Reynslan af þeim athugunum sem við höfum gert með mismunandi gögnum sýnir að þegar notast er við þriðja stigs splæsiföll hafa jaðarskilyrðin, s.s. ekki-hnútur og klemmd tiltölulega lítil áhrif á lögun vaxtarófsins. Flest jaðarskilyrði, beitt á þriðja stigs splæsiföll, ná hins vegar ekki að koma í veg fyrir sveiflur í framvirka vaxtarófinu. Af þessum sökum munum við nær eingöngu takmarka athuganir okkar við notkun þvingaðra splæsifalla. Beita verður þjálgunaraðferðum hins vegar af varkárni, þar sem of mikil áhersla á þjált vaxtaróf getur leitt til rangrar verðlagningar vaxtaverkfæra (Bliss, 1997). Þessi atriði verða rædd nánar hér á eftir þegar við beitum þjálguðum splæsiföllum á íslenska vaxtarófið.

7. Íslenski skuldabréfamarkaðurinn

Íslenski skuldabréfamarkaðurinn hefur tekið miklum breytingum á undanförnum árum. Viðskipti með skuldabréf hafa stóraukist og eru skuldabréf af mismunandi tegundum nú umtalsverður hluti af fjárfestingarsafni flestra stærri fjárfesta. Engu að síður er íslenski skuldabréfamarkaðurinn, enn sem komið er, tiltölulega skammt á veg kominn.

Mest viðskipti á skuldabréfamarkaði eru með ríkistryggð bréf, sem eru gefin út af Lánasýslu ríkisins og Íbúðalánasjóði. Helstu kaupendur skuldabréfa eru lífeyrissjóðirnir ásamt verðbréfasjóðum og stórum fjárfestum. Nýlega hefur þó mikið átak verið gert til að kynna íslenska skuldabréfamarkaðinn fyrir erlendum fjárfestum. Hefur þessi viðleitni borið nokkurn árangur og eru erlendir fjárfestar orðnir allfyrirferðarmiklir á íslenskum skuldabréfamarkaði.

Ávöxtun ríkistryggðu bréfanna leggur grundvöllinn að áhættulausum vöxtum á íslenska markaðnum. Það er því helst greining þessara bréfa sem er notuð til samsetningar vaxtarófsins yfir meðallöng og lengri tímabil. Ríkistryggðu skuldabréfin eru annaðhvort verðtryggð eða óverðtryggð og er meðallíftími þeirra frá minna en einu ári til rúmlega 40 ára. Því eru forsendur fyrir því að setja saman hvort tveggja í senn, vaxtaróf fyrir nafnvexti og raunvexti. Tengslin á milli rófanna tveggja gefa upplýsingar um verðbólguvæntingar markaðarins. Vandamálið við greiningu slíkra væntinga er hins vegar fæð bréfanna og mismunandi líftími verðtryggðra og óverðtryggðra skuldabréfa. Í þessari grein skoðum við einungis óverðtryggð skuldabréf.

8. Óverðtryggð skuldabréf - nafnvextir

Óverðtryggð skuldabréf á íslenska markaðnum eru fá. Hér munum við einungis notast við fjögur óverðtryggð skuldabréf sem eru RIKV05 0315

Tafla 3

Helstu kennistærðir óverðtryggðu skuldabréfanna sem notuð eru. Gert er ráð fyrir gjalddaga þann 25. janúar 2005

	Tegund	*Útgáfudagur*	*Gildislok*	*Fyrstu vaxtagreiðslur*	*Vextir*	*Innkallanleg*	*Innleysanleg*	*Markaðsvirði (ma ISK)*
RIKV05 Ríkisvíxlar	Affallabréf	01.12.'04	15.03.05	*	0,0	Nei	Nei	7,0
RIBB07 Ríkisbréf	Affallabréf	09.02.'01	09.02.'07	*	0,0	Nei	Nei	21,79
RIKB10 Ríkisbréf	Vaxtagreiðslubréf	17.03.'04	17.03.'10	17.03.'05	7,00	Nei	Nei	8,89
RIKB13 Ríkisbréf	Vaxtagreiðslubréf	17.05.'02	17.05.'13	17.05.'03	7,25	Nei	Nei	26,84

Tafla 4

Bréfin RIKV05 og RIKB07 eru affallabréf sem greiða höfuðstólinn við gildislok. RIKB10 og RIKB13 greiða 7 kr. og 7,25 kr. árlega vexti. Lokagreiðsla RIKB10 er 107 kr. þann 17. mars 2010 en lokagreiðsla RIKB13 107.25 er 17. maí 2013.

	15.03.05	*17.03.05*	*15.05.05*	*17.03.06*	*15.05.06*	*09.02.07*	*17.03.07*	*15.05.07*
RIKB07						100		
RIKB10		7		7			7	
RIKB13			7,25		7,25			7,25

(ríkisvíxill), RIKB07 0209 (ríkisbréf), RIKB10 0317 (ríkisbréf) og RIKB13 0517 (ríkisbréf). Allar athuganir í þessari grein gera ráð fyrir gjalddaga þann 25. janúar 2005. Helstu kennistærðir bréfanna eru gefnar upp í töflu 3.

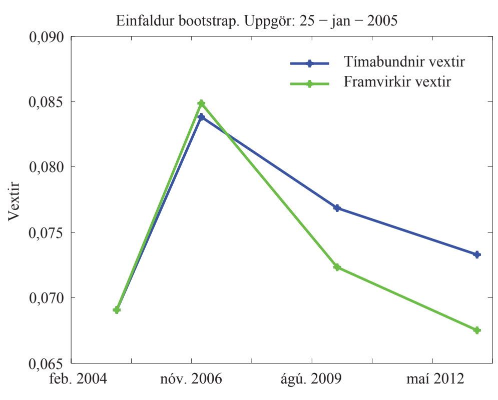
Hluti af fjárstreymisfylki þessara skuldabréfa er sýndur í töflu 4.

Með því að taka saman allar vaxtagreiðslur skuldabréfanna fjögurra finnum við að fjárstreymisfylkið er 4 x 19. Við getum notað fjárstreymisfylkið í töflu 4 og einfaldar bootstrap-aðferðir til að smíða vaxtaróf yfir gildistímabil bréfanna. Til að byrja með finnum við einungis tímabundna vexti og framvirka vexti fyrir fjórar dagsetningar, sem jafngilda lokagjalddaga bréfanna. Þetta eru dagsetningarnar í fjórða dálki í töflu 3.

Með því að nota bootstrap fyrir lokagjalddaga bréfanna og tengja vaxtapunktana með beinum

Mynd 5

Tímabundnir og framvirkir vextir fundnir með bootstrap út frá gögnunum í töflu 4. Punktarnir eru tengdir saman með beinum línum



línum finnum við tímabundnu vextina sem sýndir eru á mynd 5. Framvirku vextirnir finnast síðan með því að nota (1) og (4). Þeir eru einnig sýndir á mynd 5.

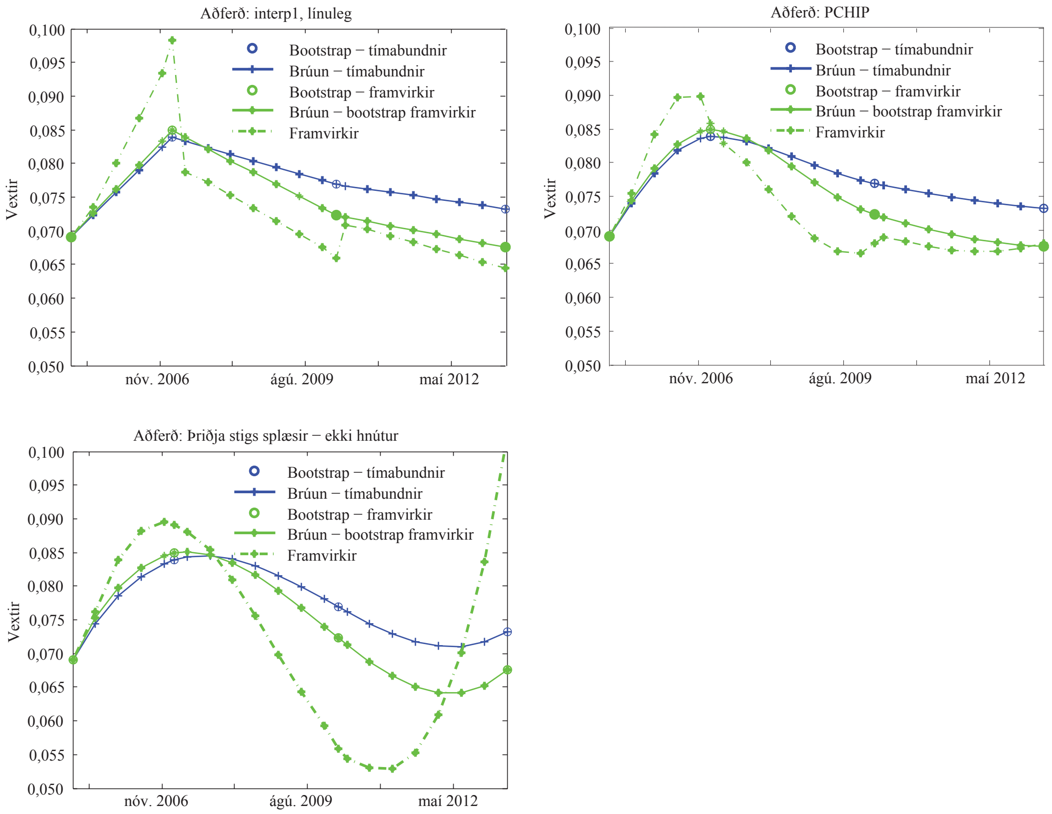
Niðurstöðurnar sem fást á þennan hátt byggjast á verulegri einföldun, sem gerir ráð fyrir því að vaxtarófin finnist með því að tengja punktana fjóra með beinum línum. Þegar enginn möguleiki er á nokkrum viðbótargögnum er þetta aðferð sem á nokkurn rétt á sér. A.m.k. gefur vaxtarófið upp rétt verð fyrir þau skuldabréf sem notuð voru til að smíða það.

Ef tilgangurinn með vaxtarófinu er að verðleggja önnur skuldabréf eða vaxtaverkfæri, sem ekki voru notuð til að setja saman vaxtarófið og hafa gjalddaga sem ekki fellur saman við gjalddaga notaðra skuldabréfa, má rökstyðja annars konar brúun milli vaxtapunkta en með beinni línu (Waggoner, 1997). Til að ákveða brúunaraðferð er í rauninni engan stuðning að fá beint frá markaðnum annan en verð á markaðsverkfærum. Mynd 6 sýnir niðurstöður þriggja aðferða, línulega brúun, PCHIP og þriðja stigs splæsifall. Í öllum tilfellum fer vaxtarófið í gegnum fasta tímapunkta, sem svara til lokagjalddaga bréfanna. Brúunaraðferðirnar reikna síðan til viðbótar þessum punktum 20 vaxtagildi fyrir tímapunkta, sem eru jafndreifðir á milli fyrsta og síðasta lokagjalddaga. Í þessu tilfelli tölum við um 20 punkta brúun.

Í sumum tilfellum leiðir brúun vaxta til sveiflugjarns hátternis, sérstaklega fyrir framvirka vexti, eins og rætt var að ofan, sjá mynd 3. Þetta kemur fyrst og fremst til vegna þess, hversu viðkvæmir framvirkir vextir eru gagnvart breytingum á tímabundnum vöxtum. Ýmsar leiðir eru mögulegar til að draga úr sveiflukenndu hátterni framvirkra

Mynd 6

Þrjár mismunandi brúunaraðferðir fyrir tímabundna og framvirka vexti, sem fengust með því að nota bootstrap á gögnin í töflu 4



vaxta og þarf oft að treysta á innsæi og reynslu frekar en haldgóð fræðileg rök.

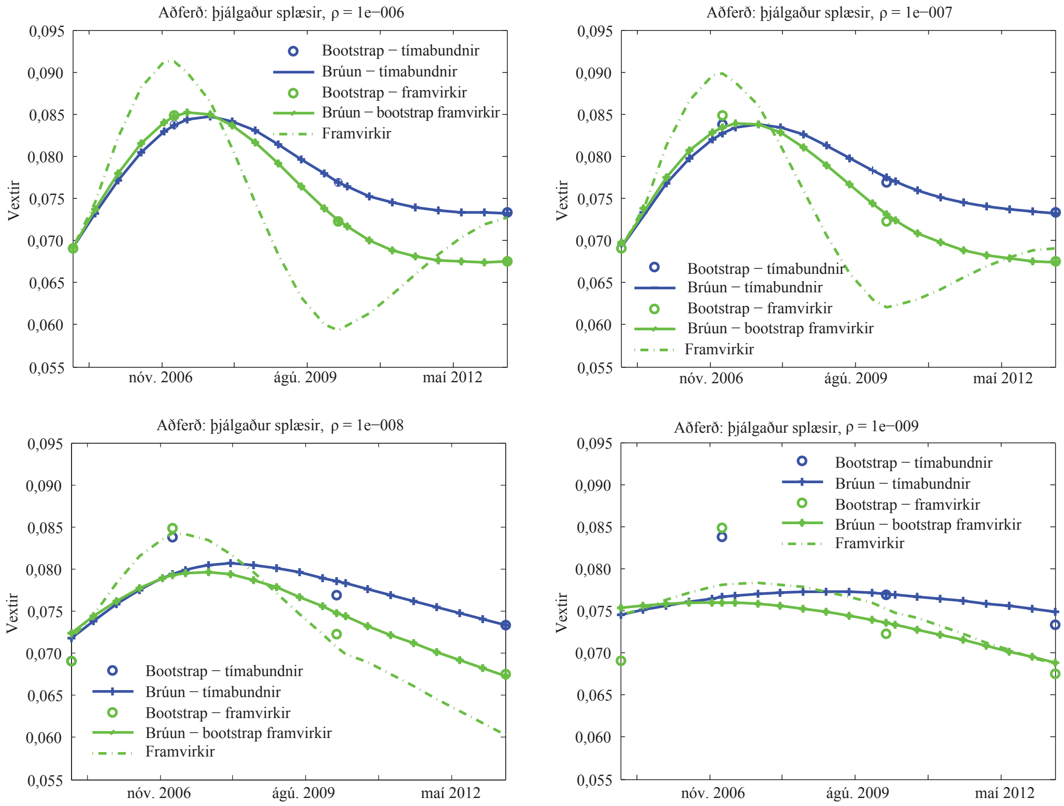
Með því að beita þvingaðri bestun, í samræmi við það sem rætt var að ofan (sjá hluta 6), verður nokkur breyting á hátterni vaxtarófanna. Samsetning vaxtarófsins, út frá gefnum gögnum, byggist nú á því að finna ásættanlegt jafnvægi annars vegar á milli lágmörkunar skekkju, miðað við aðferð minnstu fervika, og hins vegar að finna þjálan vaxtaferil. Áhrifin sem þessi aðferð hefur á íslenska nafnvaxtarófið koma fram á mynd 7 fyrir fjögur mismunandi gildi á þjálgunarstærðinni ρ.

Eftir því sem stærðin $(1 - \rho)$ stækkar, því þjálli verða vaxtarófin. Af mynd 7 er augljóst að við þetta verður ris vaxtarófsins minna og þar af leiðandi dregur úr framlagi fyrsta vaxtapunktsins. Það getur verið varhugavert að nota of há gildi fyrir stærðina $(1 - \rho)$, sérstaklega þegar skuldabréfin eru jafn fá og raun ber vitni. Þetta vandamál kemur skýrt fram í þessu tilfelli, þar sem það er í rauninni einungis eitt bréf sem ber ábyrgð á öllu risi vaxtarófsins í upphafi. Hin þrjú bréfin liggja nánast á beinni línu. Þetta sýnir einfaldlega að það er ekki auðvelt að setja saman nafnvaxtarófið mörg ár fram í tímann með því að nota einungis fjögur skuldabréf, sem er þó allt sem íslenski markaðurinn býður upp á.

Eitt vandamál við vaxtarófið að ofan er að það nær ekki til skemmri tíma en eins árs. Þekking á skammtímavaxtarófinu er hins vegar nauðsynleg

Mynd 7

Gröfin sýna hvernig leitast er við að finna vaxtaróf sem fullnægja ákveðnum jafnvægisskilyrðum á milli þess að lágmarka frávik reiknaðs verðs frá raunverði notaðra bréfa og þess að draga úr sveiflukenndu hátterni vaxtarófsins



til að verðleggja og baktryggja vaxtaafleiðusamninga til skemmri tíma, svo sem skipta- og þak-/gólf-samninga. Til þess að smíða vaxtarófið fyrir skemmri tímalengdir grípum við til þess ráðs að nota REIBOR-vexti.

9. Notkun REIBOR-vaxta fyrir skammtímavaxtaróf

Íslenski markaðurinn gefur daglega upp REIBOR-vexti fyrir eftirfarandi gildistímabil; 1d, 1v, 2v, 1m, 2m, 3m, 6m, 9m, 12m. Við ræðum nú möguleikann á því að nota REIBOR-vexti til að setja saman stutta enda vaxtarófsins. Hafa verður þó í huga að ýmis vandamál koma upp þegar þetta er reynt. Þau helstu eru:

- Einhver áhættuþóknun er fólgin í REIBOR-vöxtum þar sem þessir vextir gilda fyrir millibankalán og eru því ekki fullkomlega áhættulausir, líkt og lán með ríkisábyrgð;
- REIBOR-vextir eru langtum óstöðugri en ávöxtunarkrafa skuldabréfa og þar af leiðandi vaxtaróf áhættulausra skuldabréfa.

Aðferðafræðin, sem við notum, er að gera ráð fyrir affallabréfum, sem hafa sömu líflengd og REIBOR-vextirnir og greiða eina nafneiningu gjaldmiðils á gjalddaga. Verð bréfs í dag, á tíma *t*, sem greiðir eina krónu eftir tímann $T^i - t$ er því:

$$P(t,T_i) = \frac{1}{1 + R(t,T_i)\alpha(t,T_i)} \tag{35}$$

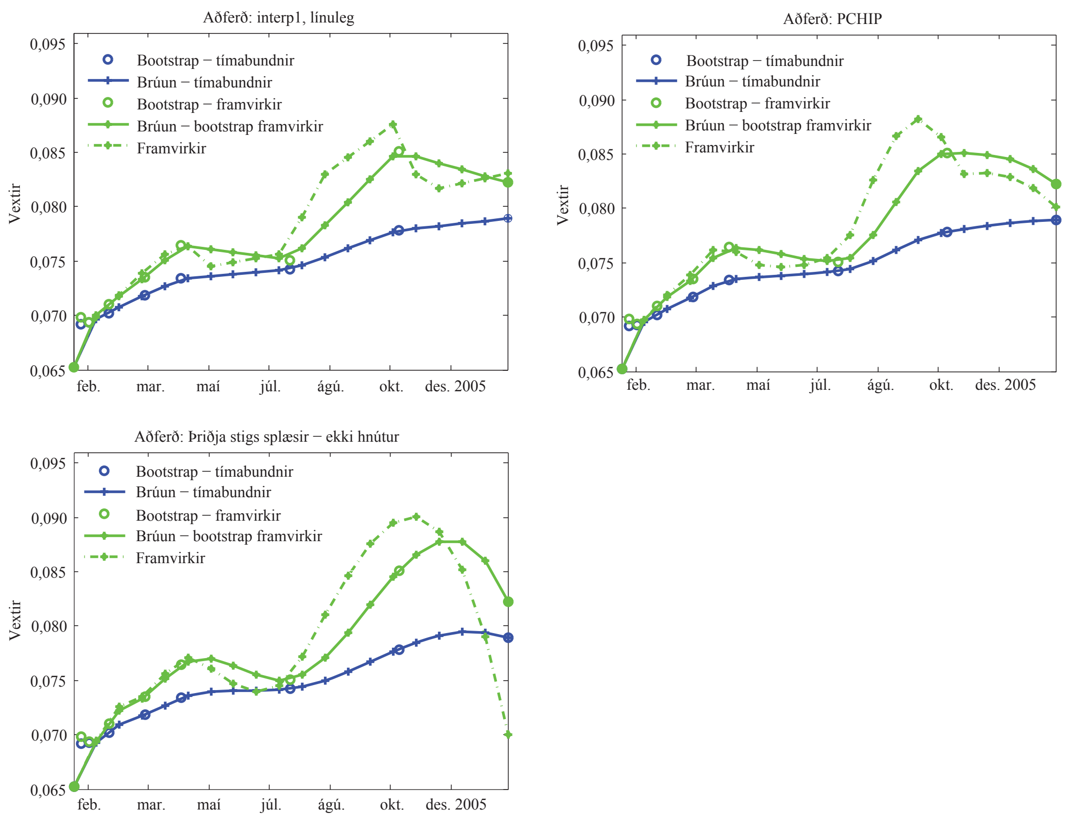
Stærðin $\alpha(t,T_i)$ mælir tímann á milli *t* og T_i samkvæmt þeirri dagareglu (e. *day count convention*) sem notuð er hverju sinni. Við notum svokallaða raun/360- (e. *act/360*) reglu þar sem gert er ráð fyrir 360 dögum í árinu og telur síðan dagana á milli tímanna *t* og T_i. Aðrar reglur eru einnig notaðar en verða ekki ræddar hér.

Á þennan hátt höfum við níu affallabréf með gildistíma frá einum degi til eins árs. Við getum því bætt þessum bréfum við safn óverðtryggðra bréfa til að smíða vaxtarófið frá einum degi upp í 9 ár. Áður en við notum REIBOR-vexti til að framlengja vaxtarófið til skemmri tíma skoðum við vaxtarófið sem fæst með affallabréfunum í jöfnu (35). Síðan tengjum við vaxtarófin tvö saman. Mynd 8 sýnir vaxtarófið fyrir eitt ár frá 25. janúar 2005, sem við finnum með því að nota mismunandi brúunaraðferðir.

Það er augljóst af þessu að eins árs vaxtaróf REIBOR-vaxta er nokkuð óreglulegt og því eðlilegt að þjálga það með aðstoð þjálgaðra splæsifalla.

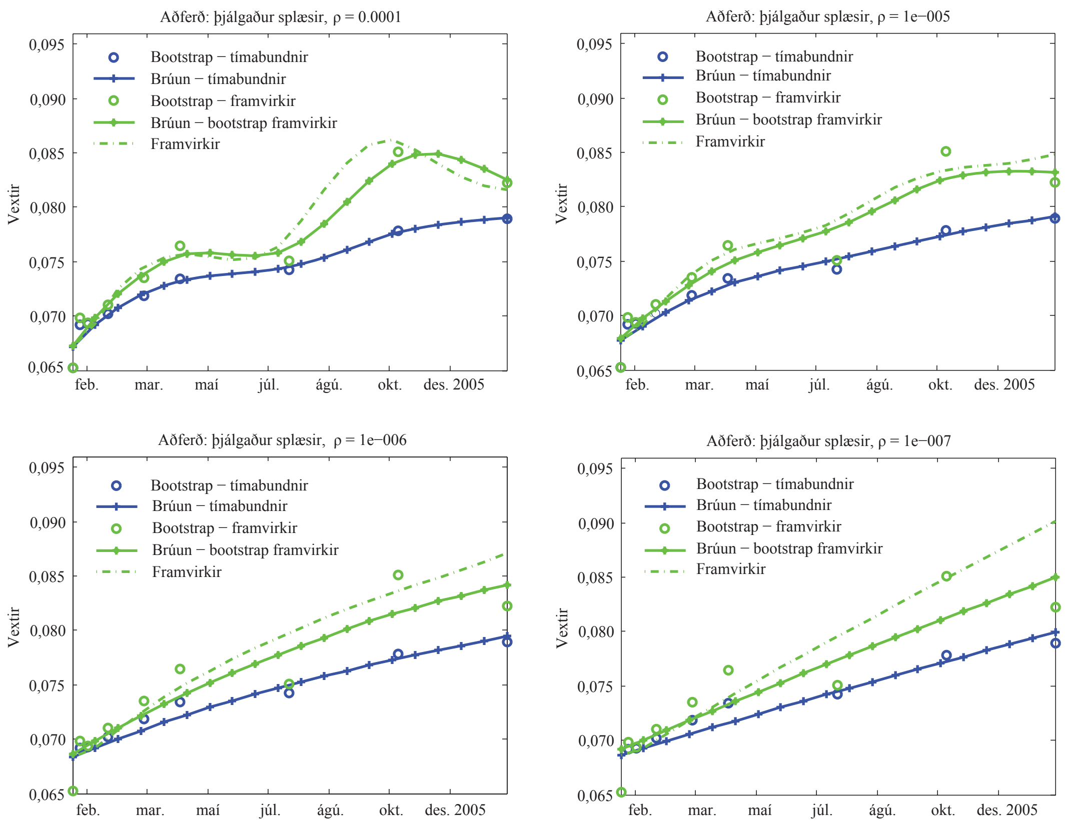
Mynd 8

Vaxtaróf REIBOR sem finnst með þremur mismunandi brúunaraðferðum. Gildistími 25. janúar 2005



Mynd 9

REIBOR-vaxtarófið, tímabundið og framvirkt,
fyrir fjóra mismunandi þjálgunarfasta. Gildistími 25. janúar 2005



Annar möguleiki er að þjálga gögnin sjálf áður en á þau er beitt mismunandi brúunaraðferðum. Það er hins vegar ekki ljóst hvernig slík þjálgun ætti að fara fram og því kjósum við fyrri möguleikann. Mynd 9 sýnir tímabundna og framvirka vexti þar sem fjögur mismunandi gildi hafa verið valin fyrir þjálgunarfastann.

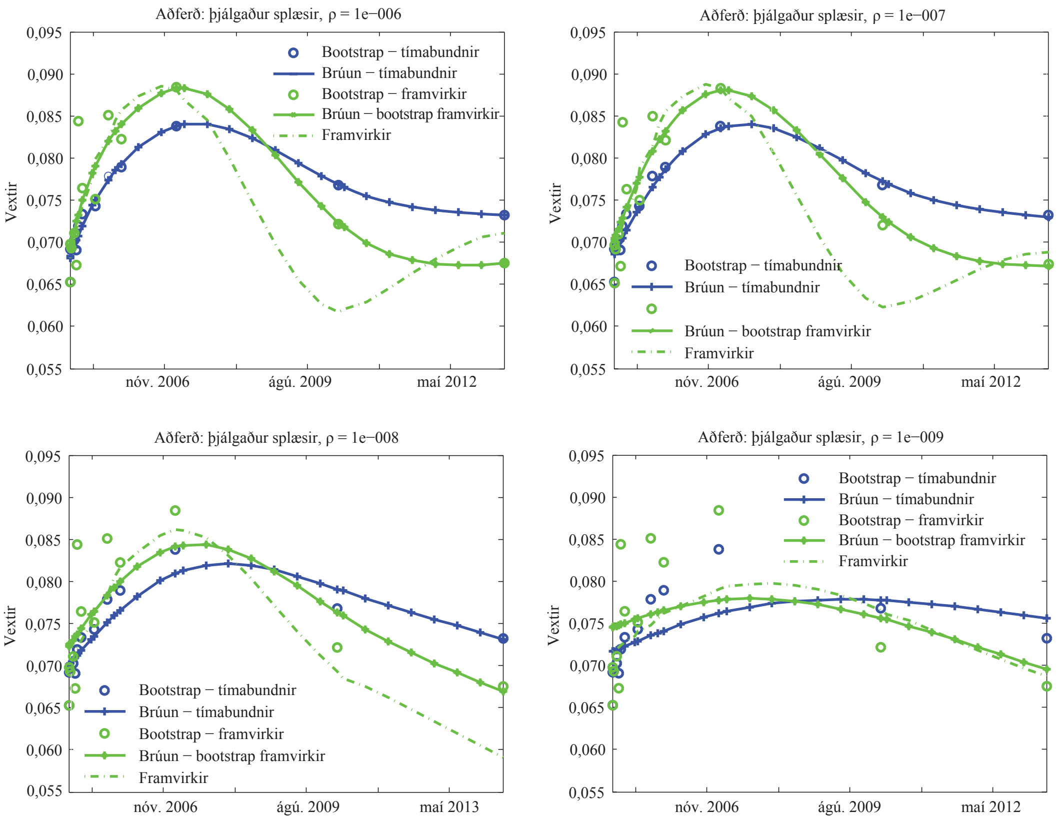
Næst snúum við okkur að því að setja saman vaxtaróf með því að nota hvort tveggja í senn, REIBOR-vexti og verð óverðtryggðra ríkisskuldabréfa. Mynd 10 sýnir niðurstöðurnar fyrir fjóra mismunandi þjálgunarfasta.

Eftir því sem þjálgunarstuðullinn stækkar, þ.e. stærð ρ lækkar, því þjálli verða vaxtarófin. Ef markaðurinn býður ekki upp á fleiri verkfæri, sem geta nýst til ákvörðunar vaxtarófsins, er illmögulegt að ákveða hvaða þjálgunarstuðull eigi best við hverju sinni. Við drögum saman vaxtagildin fyrir mismunandi langa gildistíma og þrjá mismunandi þjálgunarfasta í töflu 5.

Út frá niðurstöðunum að ofan, sérstaklega myndum 7 og 10, er ljóst að það getur verið erfitt að samræma nákvæmt vaxtaróf hugmyndinni um þjált vaxtaróf. Vitanlega þarf að fara bil beggja.

Mynd 10

Tímabundin og framvirk vaxtaróf sem finnast með því að
nota fjögur óverðtryggð ríkisskuldabréf og REIBOR-vexti.
Notast er við fjóra mismunandi þjálgunarfasta. Gildistími 25. janúar 2005



Tafla 5

Fyrsti dálkur sýnir gildistíma vaxtanna. Tímabundnir vextir eru sýndir í öðrum, fimmta og áttunda dálki. Í þriðja, sjötta og níunda dálki eru sýndir brúaðir bootstrapp-framvirkir vextir. Fjórði, sjöundi og tíundi dálkur sýna framvirka vexti.

	$\rho = 10^{-7}$			$\rho = 10^{-8}$			$\rho = 10^{-9}$		
Dagsetning	*Tíma-bil*	*Boot. framv.*	*Framv.*	*Tíma-bil*	*Boot. framv.*	*Framv.*	*Tíma-bil*	*Boot. framv.*	*Framv.*
26. 1. '05	0,068757	0,068757	0,070386	0,070007	0,070007	0,072328	0,071626	0,071626	0,07453
5. 7. '05	0,073752	0,073783	0,077102	0,073106	0,073125	0,076009	0,072768	0,072775	0,075454
11. 12. '05	0,0779	0,082083	0,082337	0,075925	0,078765	0,079245	0,073854	0,074948	0,076296
20. 5. '06	0,080932	0,087029	0,085794	0,078262	0,08296	0,08175	0,074835	0,076805	0,07699
27. 10. '06	0,082904	0,088844	0,087684	0,080052	0,085443	0,083451	0,075686	0,078246	0,077503
4. 4. '07	0,083919	0,087991	0,088164	0,081266	0,086133	0,084316	0,076388	0,079205	0,077816
11. 9. '07	0,084104	0,08503	0,08743	0,081917	0,085182	0,084382	0,076936	0,07968	0,077922
17. 2. '08	0,083622	0,080726	0,085748	0,08209	0,083128	0,083786	0,077341	0,079774	0,077843
26. 7. '08	0,082638	0,075741	0,083387	0,081872	0,080343	0,082671	0,077615	0,079546	0,077599
2. 1. '09	0,081319	0,070764	0,080615	0,081353	0,077187	0,081182	0,077773	0,079038	0,077214
10. 6. '09	0,079831	0,066477	0,077703	0,08062	0,074032	0,079465	0,077827	0,07831	0,076708
17. 11. '09	0,078339	0,063479	0,074921	0,079762	0,071203	0,077663	0,07779	0,077418	0,076104
26. 4. '10	0,077009	0,062437	0,072536	0,078867	0,069054	0,075921	0,077675	0,076409	0,075424
2. 10. '10	0,075942	0,063182	0,070707	0,077995	0,067562	0,074331	0,077494	0,075323	0,074685
11. 5. '11	0,075113	0,064366	0,069376	0,077149	0,066171	0,072881	0,077256	0,074173	0,073898
17. 8. '11	0,074482	0,065671	0,06846	0,076323	0,064793	0,071547	0,076972	0,072997	0,073069
24. 1. '12	0,07401	0,06694	0,067875	0,075513	0,063411	0,070307	0,07665	0,071829	0,072207
2. 7. '12	0,073657	0,067997	0,06754	0,074716	0,061974	0,069137	0,0763	0,070694	0,071321
8. 12. '12	0,073383	0,068718	0,06737	0,073928	0,060534	0,068014	0,075931	0,069657	0,070418

10. Samantekt

Í þessari grein höfum við rætt aðferðir til að smíða vaxtaróf með því að notast við óverðtryggð skuldabréf sem verslað er með á íslenska markaðnum. Út frá tímabundna vaxtarófinu finnum við einnig framvirka vaxtarófið. Við notum REIBOR-vexti til að smíða vaxtarófið fyrir skemmri gildistíma.

Ýmis vandamál koma upp þegar reynt er að smíða vaxtaróf fyrir íslenska markaðinn. Helst er það að skuldabréf sem verslað er með eru fá. Þetta hefur það í för með sér að smíða þarf vaxtaróf fyrir löng tímabil út frá einungis örfáum vaxtapunktum. Því færri sem punktarnir eru því fleiri leiðir eru til að smíða samfellt vaxtaróf sem fer í gegnum þá. Í slíkum tilfellum er vaxtarófið ekki ótvírætt ákvarðað, þar sem mismunandi vaxtaróf geta samræmst markaðsverði notaðra skuldabréfa. Því er mikilvægt að hafa eins mörg skuldabréf og unnt er, þar sem það dregur úr margræðni vaxtarófsins.

Hægt er að fást við vandamál fárra vaxtapunkta með því að gera kröfur varðandi samfelldni og þjálni ferilsins sem tengir vaxtapunktana. Þetta er gert með því að bæta refsilið við kostnaðarfallið, sem síðan er lágmarkað, t.d. með aðferð minnstu fervika. Refsiliðurinn er í réttu hlutfalli við aðra afleiðu vaxtaferilsins og tengist því sveigju hans. Hlutfallslegt vægi refsiliðarins stýrir jafnvæginu á milli réttrar og þjállar lögunar vaxtarófsins. Eftir því sem fleiri skuldabréf eru notuð því ótvíræðari verður ferillögunin og því auðveldara er að smíða vaxtarófið, án þess að þurfa að ákveða gildi þjálgunarstærðarinnar.

Við sýnum að framvirka vaxtarófið sveiflast oft verulega mikið frá einum tíma til annars. Þótt engin fræðileg rök séu fyrir því að framvirka vaxtarófið eigi ekki að sveiflast, er slíkt hátterni óæskilegt, sérstaklega ef nota á vaxtarófið til að verðleggja einfaldar vaxtaafleiður. Í þessum tilfellum aukum við vægi liðarins sem refsar fyrir sveigju og dregur það venjulega verulega úr sveiflu framvirku vaxtanna, en á sama tíma eykst ónákvæmni aðlögunarinnar.

Við notum REIBOR-vexti til að framlengja vaxtarófið til skemmri tíma með því að innleiða níu ný affallabréf með sömu líflengd og REIBOR-vextir. Þessi bréf eru síðan notuð, ásamt óverðtryggðum skuldabréfum, til að smíða vaxtaróf frá einum degi upp í níu ár.

Á meðan ekki er boðið upp á fleiri vaxtaverkfæri á íslenska markaðnum, er fátt sem hægt er að hafa að leiðarljósi við smíðar þjáls vaxtarófs. Í ljósi þeirra breytinga sem hafa átt sér stað á íslenska markaðnum á undanförnum árum er trúlegt að fjölbreytni vaxtaverkfæra eigi eftir að aukast á komandi árum. Það er margt sem mælir með aukinni útgáfu óverðtryggðra skuldabréfa. Ný verkfæri munu gera okkur kleift að smíða áhættulausa nafnvaxtarófið fyrir íslenska markaðinn með meiri nákvæmni en mögulegt er í dag. Fyrst þá munu þær aðferðir sem ræddar hafa verið í þessari grein nýtast að fullu.

Viðauki

Í grein 4 ræddum við tilfelli þar sem fjöldi jafna var jafn fjölda óþekktra. Því var mögulegt að finna lausnir, annaðhvort með beinni ítrekun eða með því að búa til safn bréfa sem hefur rétta tímalengd. Ef fjöldi jafna (fjöldi bréfa) er meiri en fjöldi óþekktra stærða (fjöldi afvöxtunarþátta) er jafna (11) ofákvörðuð. Ólíklegt er að sú staða komi upp á íslenska markaðnum þar sem fjöldi bréfa er ekki mikill. Við ræðum þetta tilfelli því ekki frekar. Í þessum viðauka ræðum við á almennan hátt aðferðir sem notaðar eru til að draga úr fjölda óþekktra þannig að hann verði jafn fjölda jafna. Að því loknu er mögulegt að leysa fylkið (11) eftir hefðbundnum leiðum.

Vandamál íslenska markaðarins er að fjöldi bréfa er iðulega minni en fjöldi óþekktra stærða. Undir slíkum kringumstæðum er jafna (11) vanákvörðuð og hefur því margar lausnir sem hver um sig lágmarkar ferningssummuna í jöfnu (21). Með því að beita aðferð gerviandhverfra fylkja (Moler, 2004) er hins vegar hægt að finna lausnir sem gera hvort tveggja í senn, lágmarka afgangsskekkjuna og hafa minni staðlaða lengd en allar aðrar lausnir. Þessi möguleiki, sem hefur ýmsa kosti, verður athugaður nánar á öðrum vettvangi.

Ein leið til að taka á þessu vandamáli er að fækka óþekktum stærðum með því að gera ráð fyrir tengslum á milli þeirra, en með réttum fjölda tengsla er hægt að fækka óþekktum stærðum þannig að þær verði jafn margar og jöfnurnar. Það getur hins vegar verið vandkvæðum bundið að ákvarða þau tengsl sem notuð eru. Mögulegt er að gera ráð fyrir tengslum á milli tímabundinna vaxta eða afvöxtunarþátta fyrir mislöng tímabil. Við ræðum þessa aðferðafræði fyrst á almennan hátt með hliðsjón af tímabundnum vöxtum, en lítum síðan á tvö einföld dæmi, annað fyrir tímabundna vexti en hitt fyrir afvöxtunarþætti.

Mengið $T_K = \{T_{N_1}^{(1)}, T_{N_2}^{(2)}, ..., T_{N_K}^{(K)}\}$ gefur þá tíma sem bréfin K borga höfuðstól og síðustu vaxtagreiðslur. Þetta eru því þeir tímar sem bréfin renna út á. Fjöldi þessara tíma er jafn fjölda skuldabréfanna. Við göngum nú út frá því að hægt sé að skrifa $R(t, T_j^{(k)})$ fyrir $1 \leq k \leq K, 1 \leq j \leq N_k - 1$ sem margliðufall af tímabundnum vöxtum $R(t, T_{N_k}^{(k)}); k = 1,...,K$ sem samsvara til lokatíma bréfanna. Nánar tiltekið, ef $\tau_k \in (T_{N_{k-1}}^{(k-1)}, T_{N_k}^{(k)}]$ þá er:

$$\text{(V1)} \qquad R(t, \tau_k) = \sum_{j=0}^{g} \left[\sum_{l=1}^{K} \Theta_{k,l}^{(j)} R(t, T_{N_l}^{(l)}) \right] \tau_k^j ,$$

þar sem g gefur stig margliðunnar.

Við athugum sértilfelli. Með því að setja $T_i^{(k)}; k=1,...,K$; $i = 2, .., N_k - 1$ inn fyrir τ_k og setja g = 3 finnst:

$$\text{(V2)} \qquad R(t, T_i^{(n)}) = \sum_{l=1}^{K} \Lambda_{k,l}^{[n,i]} R(t, T_{N_l}^{(l)}),$$

þar sem:

(V3) $$\Lambda_{k,l}^{[n,i]} = \Theta_{k,l}^{(0)} + \Theta_{k,l}^{(1)} T_i^{(n)} + \Theta_{k,l}^{(2)} \left(T_i^{(n)}\right)^2 + \Theta_{k,l}^{(3)} \left(T_i^{(n)}\right)^3 .$$

Vísarnir $[n,i]$ gefa til kynna skuldabréf n og tímann $T_i^{(n)}$. Vísirinn k gefur til kynna að $T_i^{(n)} \in \left(T_{N_{k-1}}^{(k-1)}, T_{N_k}^{(k)}\right]$ og l er samlagningarvísir þ.e.$T_{N_l}^{(l)}$ hleypur yfir gildislok allra skuldabréfanna. Með því að setja (V1) inn í jöfnu (11) finnum við að fjöldi jafna og fjöldi óþekktra er nú jafn og jafna (11) hefur því eina lausn fyrir gefna stuðla $\Theta_{k,l}^{(j)}$.

Í stað þess að gera ráð fyrir því að tímabundnir vextir séu margliðufall af tímabundnum vöxtum er einnig mögulegt að ganga út frá sams konar líkani fyrir afvöxtunarþætti. Til að skoða hvað þessar aðferðir hafa í för með sér fyrir lögun vaxtarófsins skulum við líta á tvö dæmi.

Dæmi 1

Við gerum ráð fyrir því að tímabundnu vextirnir *R(t,T)* séu einungis línulegt fall af nærliggjandi, skemmri og lengri tímabundnum vöxtum, þ.e. $\Theta_{k,l}^{(j)} = 0$ ef $j \geq 1$. Í þessu tilfelli höfum við:

(V4) $$R(t,T) = \sum_{l \in \{k-1,k\}} \Theta_{k,l}^{(0)} R(t,T_l) = \left(\frac{T_k - T}{T_k - T_{k-1}}\right) R(t,T_{k-1}) + \left(\frac{T - T_{k-1}}{T_k - T_{k-1}}\right) R(t,T_k) \; ; \; T_{k-1} < T < T_k .$$

Með því að nota tengslin á milli tímabundinna og framvirkra vaxta (7) finnum við:

(V5) $$f(t,T) = \left(\frac{T_k + t - 2T}{T_k - T_{k-1}}\right) R(t,T_{k-1}) \cdot + \left(\frac{2T - T_{k-1} - t}{T_k - T_{k-1}}\right) R(t,T_k) \; ; \; T_{k-1} < T < T_k .$$

Venjulega er gert ráð fyrir að $t = 0$, sem einfaldar jöfnu (V5) enn frekar.

Dæmi 2

Ef við gerum ráð fyrir því að hægt sé að lýsa afvöxtunarþætti *D(t,T)* sem línulegri vörpun af nærliggjandi afvöxtunarþáttum finnum við:

(V6) $$D(t,T) = \sum_{l \in \{k-1,k\}} \Theta_{k,l}^{(0)} D(t,T_l) = \left(\frac{T_k - T}{T_k - T_{k-1}}\right) D(t,T_{k-1}) + \left(\frac{T - T_{k-1}}{T_k - T_{k-1}}\right) \cdot D(t,T_k) \; ; \; T_{k-1} < T < T_k .$$

Tímabundnu vextirnir verða þá:

(V7) $$R(t,T) = \frac{-1}{T-t} \log\left(\left(\frac{T_k - T}{T_k - T_{k-1}}\right) D(t,T_{k-1}) \cdot + \left(\frac{T - T_{k-1}}{T_k - T_{k-1}}\right) D(t,T_k) \right) \; ; \; T_{k-1} < T < T_k .$$

Af þessu leiðir að framvirkir augnabliksvextir verða:

(V8) $$f(t,T) = \frac{D(t,T_{k-1}) - D(t,T_k)}{(T_k - T) D(t,T_{k-1}) + (T - T_{k-1}) D(t,T_k)} \; ; \; T_{k-1} < T < T_k .$$

Við berum nú saman niðurstöðurnar úr dæmi 1 og dæmi 2 fyrir tímabundna vexti í töflu V1.

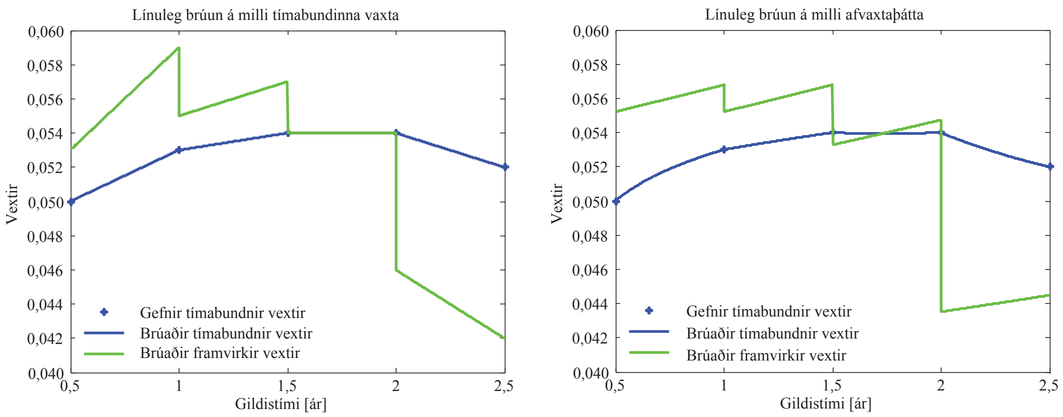
Tafla V1
Uppgefnir tímabundnir
vextir fyrir fimm mismunandi gildistíma.

T (tími ár)	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
R (tímabundnir vextir)	0,05	0,053	0,054	0,054	0,052

Báðar aðferðirnar í dæmunum að ofan byggjast á nokkurri einföldun og geta leitt til talsverðrar skekkju (Hagan og West, 2004). Myndirnar sýna greinilega vandamál sem oft kemur upp við smíðar vaxtarófa út frá strjálum gögnum. Vandamálið er óstöðugleiki og stór stökk, sérstaklega í framvirka vaxtarófinu. Þetta kemur fyrst og fremst til af því að framvirkir vextir eru háðir afleiðu tímabundinna vaxta. Örlítil breyting í þeim síðarnefndu getur leitt til mikillar breytingar á þeim fyrrnefndu.

Mynd V1

Myndirnar sýna niðurstöðurnar af því að brúa línulega á milli tímabundinna vaxta (vinstri) og af því að brúa línulega á milli afvöxtunarþátta (hægri). Í báðum tilfellum reiknum við framvirku vextina.



Heimildaskrá

Anderson, N., F. Breedon, M. Deacon, A. Derry og G. Murphy (1996). Estimating and Interpreting the Yield curve, John Wiley and Sons.

Ang, A., M. Piazzesi og M. Wei (2003). *What does the Yield Curve Tell us about GDP Growth?* Columbia Business School Working Paper, http://www.columbia.edu/~mw427

Bernadell, C., J. Coche og K. Nyholm (2005). *Yield Curve Prediction for the Strategic Investor*, European Central Bank, Working Paper Series, No. 472/April.

Björk, T. (1998). Arbitrage Theory in Continuous Time, Oxford University Press.

Bliss, R. R. (1997). *Testing Term Structure Estimation Methods*, Advances in Futures and Options research, 9, 197–231.

Bolder, D., og D. Stréliski (1999). *Yield Curve Modelling at the Bank of Canada*, Technical report No. 84, February.

Brace, A., D. Gatarek og M. Musiela (1997). *The Market Model of Interest Rate Dynamics*, Mathematical Finance, 7, 127–155.

Brooke, M., og N. Cooper (2000). *Inferring market interest rate expectations from money market rates*, Bank of England Quarterly Bulletin: November, 392–402.

Chambers, D. R., W. T. Carleton og D. W. Waldman (1984). A New Approach to Estimation of the Term Structure of Interest Rates, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 19, 233–252.

de Boor, C. (2004). Spline Toolbox For Use with Matlab, Version 3, June.

Diebold, F. X., G. D. Rudebush og S. B. Aruoba (2004). *The Macroeconomy and the Yield Curve: A Dynamic Latent Factor Approach*, May 19. http://www.ssc.upenn.edu/~fdiebold

Fabozzi, F. J. (ed.) (2001). The Handbook of Fixed Income Securities, Chapter 6, 6th Edition, McGraw-Hill.

Hagan, P., og G. West (2004). *Interpolation Methods for Yield Curve Construction*, Bloomberg Report, Nov. 29.

Heath, D., R. Jarrow og A. Morton (1992). *Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology*, Econometrica, 60, 1, 77–105.

Jamshidian, F., og Y. Zhu (1997). *Scenario Simulation: Theory and Methodology*, Finance and Stochastics, 1, 43–67.

McCulloch, J. H. (1971). *Measuring the term structure of interest rates*, Journal of Business, XLIV, January 1971, 19–31.

McCulloch, J. H. (1975). *The Tax Adjusted Yield Curve*, Journal of Finance 30, June, 811–830.

Miltersen, K. R., K. Sandmann og D. Sondermann (1997). *Closed Form Solutions for Term Structure Derivatives with Log-normal Interest Rates*, The Journal of Finance, 52, 409–430.

Moler, C. (2004). Numerical Computing with MATLAB, January 5, http://www.mathworks.com/moler.

Subramanian, K. V. (2001). *Term Structure Estimation in Illiquid Markets*, The Journal of Fixed Income, 1–10.

Waggoner, D. F. (1997). *Spline Methods for Extracting Interest Rate Curves from Coupon Bond Prices*, Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper, 97-10.