

Framlag Robert Aumann og Thomas Schelling til leikjafræða: Átök, erjur og samvinna

Grein af vef Nóbelsstofnunarinnar í þýðingu Sveins Agnarssonar

Samantekt: Fræðimenn á sviði félagsvísinda hafa lengi velt vöngum yfir því hvað valdi átökum og kalli á samvinnu. Tilkoma og þróun leikjafræði um miðja 20. öld leiddi til þess að ný sýn opnaðist á þessi viðfangsefni og gerði mönnum kleift að rannsaka þau stærðfræðilega. Árið 2005 féllu Nóbelsverðlaunin í hagfræði í skaut Bandaríkjamönnum Robert Aumann og Thomas Schelling sem hafa átt veigamikinn þátt í að þróa ákveðna tegund leikjafræði, svokallaða samkeppnisleikjafræði. Jafnframt hafa þeir sýnt fram á hvernig hægt er að nota þessa aðferðafræði til að skoða áleitin þjóðfélagsmál og ýmis atriði í mannlegum samskiptum. Schelling sýndi fram á að hægt er að líta á ýmsa alþekkta þætti í félagslegum samskiptum sem samkeppnisleiki þar sem saman fara bæði sameiginlegir og ólíkir hagsmunir. Aumann notaði aftur á móti fræðilega samkeppnisleikjafræði til að rannsaka hvað ræður samskiptum einstaklinga til lengri tíma lítið. Í þessari grein er greint frá helstu rannsóknum tvímenninga og framlagi þeirra til fræðanna.

Lykilorð: Leikjafræði, samkeppnisleikir, trúverðugleiki.

JEL: C72.

1. Inngangur

Stríð og önnur átök eru ein helsta orsök þeirrar eyndar sem oft blasir við í mannheimum. Til að þjóðfélag fái þrifist er ákveðin lágmarkssamvinna nauðsynleg, ella er hætt við að tilveran snúist upp í stjórnlausu baráttu við náttúruöflin og vægðarlausu samkeppni einstaklinga á milli. Við slíkar aðstæður verður lífið sjálft einmanalegt, snautt, ógeðfellt, ruddalegt og skammvinnt eins og Thomas Hobbes komst að orði.¹

Fræðimenn á sviði félagsvísinda hafa lengi velt vöngum yfir því hvað valdi átökum og kalli á samvinnu. Tilkoma og þróun leikjafræði (e. *game theory*) um miðja 20. öld leiddi til þess að ný sýn opnaðist á þessi viðfangsefni og gerði mönnum kleift að rannsaka þau stærðfræðilega. Grunnur leikjafræðinnar var lagður í hinu klassíska verki þeirra John von Neumann og Oscar Morgenstern

1. Hobbes (1651).

The Theory of Games and Economic Behavior sem út kom árið 1944. John Harsanyi, John Nash og Reinhard Selten, sem hlutu Nóbelsverðlaunin í hagfræði árið 1994, bættu við ýmsum lausnarhugtökum og innsæi sem juku notagildi og spádóms-eiginleika samkeppnisleikjafræði (e. *non-cooperative game theory*). Lykillausnarhugtakið í þessari leikjafræði er Nash-jafnvægi, en með því er átt við þá lausn þegar sérhver aðili velur þá leikáætlun (e. *strategy*) sem kemur honum best í ljósi þess hvaða leikáætlanir aðrir hafa valið.² Harsanyi sýndi fram á að þessi lausn átti almennt við um leiki þar sem upplýsingar voru takmarkaðar, þ.e. þar sem aðilar þekktu ekki valkostaröðun (e. *preferences*) hver

2. Þegar samkeppnisleikur er settur upp er gert ráð fyrir tilteknum fjölda þátttakenda sem hver um sig getur valið á milli ákveðins fjölda ólíkra leikáætlana. Ef þátttakendur eru margir getur því komið upp fjöldi ólíkra samsetninga af leikáætlunum. Þeim ávinningi sem hver aðili ber úr bítum í hvert sinn er síðan lýst með ákveðnu stærðfræðilegu falli.

annars. Selten sýndi hvernig hægt er að nota hugtakið í kvikum leikjum (e. *dynamic games*) og í leikjum þar sem örliðlar líkur eru á að aðilar geri mistök. Vinna þessara fræðimanna hefði þó trúlega öll verið unnin fyrir gýg ef ekki hefði verið hægt að nota leikjafræði til að bregða birtu á mikilvæg álitamál í samfélaginu.

Rannsóknir Robert J. Aumann og Thomas C. Schelling voru þýðingarmiklar fyrir framþróun samkeppnisleikjafræði og sýndu hvernig hægt væri að nota þessa aðferðafræði til að skoða áleitin þjóðfélagsmál.³ Enda þótt tvímenningarnir komi úr ólíkum áttum – Aumann er stærðfræðingur og Schelling hagfræðingur – telja þeir báðir að hægt sé að nota sjónarhorn leikjafræðinnar til að skoða ýmis atriði í mannlegum samskiptum. Að mati Schelling var hægt að líta á ýmsa alþekkta þætti í félagslegum samskiptum sem samkeppnisleiki þar sem saman fóru bæði sameiginlegir og ólíkir hagsmunir. Aumann notaði aftur á móti fræðilega samkeppnisleikjafræði til að rannsaka hvað ræður samskiptum einstaklinga til lengri tíma litið.

Skrifum Aumann og Schelling um átök og samvinnu var strax vel tekið þegar þau tóku að birtast seint á sjötta áratugnum, en það var ekki fyrr en löngu seinna sem hugmyndir þeirra fóru virkilega að gera sig gildandi. Þá töf má bæði rekja til þess hve frumlegar hugmyndir þeirra voru og hve stór skref þurfti næst að taka til að þróa hugmyndir þeirra áfram. Seint um síðir og í raun ekki fyrr en á síðasta aldarfjórðungi varð leikjafræðin almennt viðurkennd, bæði sem sérgrein og aðferðafræði innan hagfræðinnar og annarra félagsvísinda. Þá greiningu sem nú tíðkast á átökum og samvinnu má nær eingöngu rekja til rannsókna Aumann og Schelling.

2. Schelling

Í bók sinni *The Strategy of Conflict*, sem út kom árið 1960, kynnti Thomas Schelling hugmyndir

3. Í samvinnuleikjafræði er gengið út frá því að bindandi samkomulag – eitt eða fleiri – geti hugsanlega verið fyrir hendi og að aðilar hafi ákveðna skoðun á því hver þeirra séu fýsilegust. Í samkeppnisleikjafræði er hins vegar gengið út frá því að aðilar ráði yfir ólíkum leikáætlunum og viti hvaða afleiðingar hver leikur hefur í för með sér og hver þeirra niðurstaðna þeim hugnist best.

sínar um hvernig hægt væri að nota leikjafræði sem aðferðafræði við rannsóknir í félagsvísindum. Schelling sneri þar bakinu við einföldum núllsummuleikjum á borð við skák, þar sem ávinningur eins aðila er ætíð jafn tapi annars, en lagði þess í stað áherslu á að hægt væri að nota samkeppnisleikjafræði til að greina ákvarðanir, sem margir aðilar kæmu að og ætíð fælu í sér bæði ólíka og sameiginlega hagsmuni. Tæpum áratug áður hafði Nash sannað að til væri jafnvægi – Nash-jafnvægi – í öllum leikjum þar sem til staðar væri takmarkaður fjöldi hreinna leikáætlana (e. *pure strategy*). Það féll í hlut Schelling að leiða út hver þessi jafnvægi væru í þeim leikjum sem væru hvað áhugaverðastir og meta hvort þessir leikir og jafnvægi þeirra væru lýsandi fyrir ákveðin hagfræðileg og félagsleg samskipti. Á þessum árum stóð kalda stríðið sem hæst og fullyrða má að rannsóknir Schelling hafi dýpkað og auðgað skilning okkar á orsökum og afleiðingum kjarnorkukapphlaups risaveldanna.

2.1 Átök, trúverðugleiki og samþætting

Fyrstu afskipti Schelling af leikjafræði má rekja til greinar sem hann birti árið 1956 - og var síðar endurútgefin sem kafli í áður nefndri bók hans - um hegðan fólks í tvíhliða samningaviðræðum. Hugtakið samningaviðræður er hér vítt skilgreint og vísar ekki eingöngu til hefðbundinna samninga á milli tveggja landa eða seljanda og kaupanda, heldur einnig til ýmissa annars konar „samninga“, svo sem þegar tveir vörubílar hlaðnir sprengiefni mætast á þröngum vegi þar sem aðeins er rúm fyrir einn, svo að tekið sé eitt af fjölmörgum lýsandi dæmum Schellings.

Við samningaviðræður reyna aðilar ætíð að ná fram eins hagstæðri niðurstöðu og þeir geta og þess vegna fela þær ætíð í sér ákveðinn hagsmunarárekstur. En samningur er eigi að síður hagfelldari lausn fyrir báða aðila en ósamkomulag. Hvor aðili um sig veit að tilraunir hans til að ná sem stærstum bita af kökunni geta gert að engu vonir um samkomulag. Hagfræðingar voru á þessum árum vanir að nota gildislæg viðmið og líta á samningaviðræður sem samvinnu tveggja aðila og velta fyrir sér spurningum á borð við: Hvað er réttlát niðurstaða? Ein undantekning var þó á þessu: Nash not-

aði bæði samvinnu- og samkeppnisleikjafræði við rannsóknir sínar. Greining hans var aftur á móti afar stærðfræðileg og fjallaði lítt um hagnýtar aðferðir við samningagerð. Það gerði Schelling hins vegar og sýndi hvaða brögðum hægt væri að beita til að snúa stöðunni sér í hag. Sérstaklega var Schelling umhugað um að benda á að við vissar aðstæður gæti jafnvel verið fýsilegt að veikja sína eigin stöðu til þess að þrýsta á mótaðilann að gefa eftir. Það getur t.d. verið áhrifaríkt fyrir hershöfðingja að brenna allar brýr að baki sér – í bókstaflegri merkingu – til að sýna andstæðingnum að hann hafi staðfastlega ekki í hyggju að draga her sinn til baka. Stjórnendur fyrirtækja gætu með sama hætti ráðið forstjóra sem hefði takmörkuð völd til samninga og stjórnmalamaður gæti hagnast á því að gefa opinberar yfirlýsingar sem hann gæti vart ferils síns vegna gengið á bak. Þessi taktík getur gengið upp ef ekki er hægt að brjóta gegn skuldbindingunni eða slíkt hefur óhæfilegan kostnað í för með sér. En ódýrar skuldbindingar er enginn vandi að brjóta og þær munu því ekki hafa mikil áhrif á viðsemjendur. Heldur versnar í því ef báðir aðilar lýsa yfir skuldbindingum sem ekki er hægt að ganga gegn og eru ósamrýmanlegar, þar eð þá aukast líkur á viðsjárverðu ósamkomulagi.

Grundvallarhugtök þessarar aðferðafræði verða líklega best skýrð með dæmi. Setjum sem svo að tvö ríki deili um yfirráð yfir tilteknu landsvæði.⁴ Bæði löndin geta hervæðst ef þau vilja. Ef þau hervæðast bæði eru miklar líkur á ófriði en lítlar líkur á friðsamlegri lausn um framtíð landsvæðisins. Hvorugt landið hefur nokkurn ávinning (*e. payoff*) af því að hervæðast. Ef löndin hervæðast ekki eru góðar líkur á að hægt sé að ná samkomulagi um landsvæðið en fremur lítil hætta á stríði. Ávinningurinn af friðsamlegri lausn fyrir hvort landið um sig er jafn *b*. En ef aðeins annað landið hervæðist getur það náð algjörum yfirráðum yfir hinu umdeilda landsvæði án þess að styrjöld brjótist út og hvorki hitt landið né nokkur annar aðili mun þá geta neytt viðkomandi land til að

draga her sinn til baka. Ávinningur árársaðilans er jafn *a*, en ávinningur þess sem ráðist er á verður þá *c*. Gefum okkur nú að $a > b > c > 0$, þ.e. að stríð sé lakasti kosturinn.⁵

Þennan einfalda hervæðingarleik má draga fram í töflu 1. Valmöguleikar annars landsins eru sýndir lárétt og hins löðrétt og ávinningur lárétta liðsins er ætíð sýndur fyrstur í töflunni. Bæði löndin taka ákvörðun sína í einu.

Tafla 1.

	Hervæðast	Hervæðast ekki
Hervæðast	0, 0	a, c
Hervæðast ekki	c, a	b, b

Þessi tegund leikja hefur oft verið nefnd „raggeit“ eða „fálki og rjúpa“ og hefur þrenns konar Nash-jafnvægi, tvö hrein og eitt blandað (*e. mixed*). Hreinu jafnvægin tvö koma upp þegar annað hvort landið hervæðist: ef annað landið býst við því að hitt muni hervæðast borgar sig fyrir það að hervæðast ekki. Blandaða jafnvægið ríkir ef slembilíkur eru á að bæði löndin hervæðist og þar með að einhverjar líkur séu á ófriði.

Hreint jafnvægi getur komist á þegar löndin hafa möguleika á að samræma aðgerðir sínar. Sú staða gæti komið upp ef leiknum væri t.d. breytt örlítið þannig að ávinningur landanna væri ósamhverfur og að báðir aðilar gætu þess vegna átt von á því að það landið sem hefði meira að græða hervæddist. Það tiltekna jafnvægi myndi þá verða trúlegast. Schelling gerði ráð fyrir að margar þær aðstæður gætu skapast þar sem fólk væri fært um slíka samræmingu, þótt formleg greining myndi hugsanlega ekki ná utan um aðalatriði slíkra jafnvægja. „Það er ekki hægt, án fyrirbyggjandi gagna, að draga ályktanir af því hvaða skilningur kann að vera fyrir hendi í ekki-núllsummuleik, rétt eins og það er ómögulegt að sanna með formlegri afleiðslu

4. Yfirgripsmeiri leikjafræðilega greiningu á mikilvægi staðfestu í samningaviðræðum má t.d. finna í Crawford (1982), Muthoo (1996) og Güth, Ritzberger og van Damme (2004).

5. Þær aðstæður geta vissulega skapast á ófriðartímum að stríð þyki ekki jafnslæmur kostur og sú niðurlægning sem fylgir því að hervæðast ekki þegar andstæðingurinn býst til ófriðar. Í þeim tilvikum gildir að $a > b > 0 > c$. Leikurinn breytist þá í vandamál fanganna og eina haldbæra lausnin verður þá sú að báðir hervæðast. Sjá kafla 3.1 hér á eftir.

að það verði hlegið að ákveðnum brandara“.⁶ Þess í stað mun jafnvægismyndun „verða svið þar sem gera má ráð fyrir að tilraunasálfræði geti lagt sitt af mörkum til leikjafræði“.⁷

Þar sem almennt er óvíst hvaða grundvallaratriði gilda um samræmingu virðist blandaða jafnvægið líklegra. Hvort land um sig er þá ekki með á tæru hvernig andstæðingurinn muni hegða sér heldur gera bæði ráð fyrir því að tiltekna líkur, p , séu á að hitt landið muni hervæðast. Nash-jafnvægislíkurnar á slíku jafnvægi eru $p=(a-b)/(a-b+c)$.⁸ Við þessar líkur er ávinningur hvors lands um sig jafnmikill af hervæðingu og því að hervæðast ekki. Ef valin eru þokkalega sennileg gildi fyrir a , b og c , má sýna fram á að líkurnar á stríði minnka eftir því sem ávinningur þess sem ráðist er á, c , eykst. Af þessu leiðir að tvær leiðir eru færar til að draga úr líkum á stríði: Annars vegar að minnka þann ávinning sem áráðilandi hefur af því að leggja undir sig hið umdeilda landsvæði, og hins vegar að bæta ávinning þess er bíður lægri hlut.⁹

En það er ekki sami hlutur að hervæðast og hótta hervæðingu. Formleg greining á mætti fælingarinnar er viðamikil viðfangsefni og verður ekki sett upp sem leikur á annan hátt en sem flókinn leikur sem fram fer í nokkrum lotum. Með innsæi Schelling að leiðarljósi er þó hægt að rekja sig áfram án þess að þurfa að grípa til flókinna stærðfræði. Trúverðug fæling felst í því að sá sem ráðist er á getur hóttað því að ráðast aftur á áráðilann og hugmyndin um „endurás“ (e. *second strike*) er eitt aðalstef bókarinnar *The strategy of conflict*.

6. Schelling (1960), bls. 164.

7. Sama rit, bls. 113.

8. Vænti ávinningurinn af hervæðingu jafngildir $(1-p)a$, en ávinningurinn af því að halda friðinn er $pc + (1-p)b$. Jafnvægislíkurnar má finna með því að leysa þessar tvær stærðir saman.

9. Hér er gengið út frá því að engin tölfræðileg fylgni sé á milli slembiákvæðana þátttakenda í leiknum. Líkurnar á stríði eru þá $q = p2\mu + (1-p)2\nu$ þar sem μ tákna líkurnar á stríði ef bæði löndin hervæðast og $\nu < \mu$ tákna líkurnar á ófriði ef hvorugt landið vígbýst. Af þessu leiðir að q er vaxandi í p fyrir öll $p > \nu/(v + \mu)$ og að q er minnkandi í c ef $c < (a-b)\mu / v$.

Schelling lagði áherslu á að uppbygging fælingarmáttar gæti reynst varhugaverð ef ranglega væri talið að gerð hefði verið árás eða ef hagsmunir og fyrirætlanir mótaðilans væru rangmetnar.

Setjum svo að land 1 taki staðfasta ákvörðun um hervæðingu ef land 2 hervæðist. Í upphafi ákveður því land 1 hvort það muni láta hervæðingu algjörlega eiga sig eða skuldbinda sig til að vígbúast ef land 2 geri svo fyrst. Land 2 fylgist grant með ákvörðunum hins landsins og ákveður í krafti þeirra hvort það muni hervæðast eður ei. Látum sem fyrr töflu 1 lýsa ávinningi aðila af stríði og friði. Við þær aðstæður mun hið fullkomna undirleiksjafnvægi (e. *subgame perfect equilibrium*) fela í sér að land 1 skuldbindur sig til að hervæðast og í framhaldinu mun hvorugt landið vígbúast.¹⁰ Það er í raun alveg nægjanlegt að allgóðar líkur séu á að land 1 skuldbindi sig til hervæðingar til að þessi niðurstaða fáiast.¹¹ Máttur fælingarinnar verður þá til þess að friðsamleg lausn næst – og ógnarjafnvægi kemst á.

Gerum nú enn fremur ráð fyrir að land 1 telji óvíst hvort land 2 vilji fremur stríð en friðsamlega samninga. Á máli leikjafræðinnar heitir þessi staða að land 1 búi yfir ófullkomnum upplýsingum um ávinning lands 2. Ætti land 1 – við þessar aðstæður – enn að skuldbinda sig til að hervæðast ef land 2 hervæðist? Greining Schellings sýnir fram á að þá færi best á því að land 1 héldi fast í skuldbindingu sína, en þó þannig að líkurnar á hervæðingu væru ekki fullkomnar, þ.e. minni en 1. Með vaxandi spennu og aukinni hernaðaruppbyggingu óvinalandsins gæti hitt landið þá hóttað því að „missa tókin á aðstæðum“ í stað þess að hótta gagnkvæmri árás. Schelling orðaði það svo sjálfur að við þannig aðstæður gæti land „hóttað því að ákveðnir hlutir gætu átt sér stað“. Með þessum hætti gætu jafnvel tiltölulega litlar líkur

10. Hugtakið undirleikur vísar til leiks innan leiks og fullkomna undirleiksjafnvægi er lausn á leik sem jafnframt er lausn á undirleikjum hans.

11. Setjum svo að líkurnar séu $\pi \in [0, 1]$ á að land 1 taki staðfasta ákvörðun um hefndarviðbrögð ef land 2 hervæðist. Ef valkostaröðun lands 2 er sú hin sama og lýst er í töflu 1 verður fælingarkafturinn að vera $b \geq (1-\pi)a$ sem má umrita sem $\pi \geq 1 - b/a = \pi^*$.

á ófriði nægt til að halda aftur af vígbúnaði andstæðingsins.¹²

Annar kostur óljósra hótana um hefnir er sá að það verður auðveldara að gera þær trúverðugar eftir því sem kostnaðurinn eða förnin við hefndina er minni. Að mati Schelling væri vænlegast að mæta óbilgjörnum andstæðingi með stigmagnandi hætti og auka þannig hægt og bitandi líkurnar á að styrjöld brytist út. Vegna þess að hvert einstakt skref er í sjálfu sér stutt er hægt að halda trúverðugleikanum til streitu með því að kynda heima fyrir undir reiði og mótmæli gegn árársstefnu andstæðingsins. Og vegna þess að andstæðingurinn getur hvenær sem er séð að sér og dregið úr hervæðingu sinni og þar með minnkað líkur á vopnuðum átökum er hættunni á ófriði haldið í lágmarki. Stigmögnun er leikur sem öllum virðist í blóð borinn, meira að segja börn í leikskóla virðast kunna hann til hlítar.

Samkvæmt því sem hér hefur verið sagt ættu lönd að halda andstæðingum sínum í óvissu um hvernig þau myndu bregðast við árás, en jafnframt að taka af allan vafa um að gagnárás kæmi sterklega til greina. Af þessu má draga tvennar ályktanir: Í fyrsta lagi er fæling því aðeins raunhæf að hægt sé að koma í veg fyrir að þau vopn sem nota á til gagnárásar verði eyðilögð í fyrstu árársarhrinunni. Þess vegna er mikilvægara að koma langdrægum eldflaugum fyrir í sprengjuheldum neðanjarðarbyrgjum en verja þéttbýl svæði. Í öðru lagi er augljóst að óstöðugleiki er stórhættulegur. Ógnarjafnvæginu er aðeins hægt að halda við meðan gagnárás telst nægjanlega líkleg og hugsanlegur ávinningur þess að leggja landið undir sig óverulegur miðað við þær hörmungar sem gagnárásin mun hafa í för með sér. Einnig er mikilvægt

að lönd halda ekki ætíð stefnu sinni óbreyttri um langan tíma og að tæknibreytingar geta haft áhrif á árársargetu ríkja og fælingarmátt varna þeirra. Þetta tvennt þarf því að hafa í huga við allar afvopunarviðræður.

Kenning Schelling um „trúverðugar skuldbindingar“ sýndi fram á að sum Nash-jafnvægi væru líklegri en önnur og kveikti hjá Reinhard Selten hugmynd að því sem kallað hefur verið fullkomið undirleiksjafnvægi.¹³ Kenningar Schelling og Selten ruddu öðrum hagfræðingum braut og meðal þeirra sem fylgdu í kjölfarið voru Avinash Dixit og Michael Spence, nemandi Schelling og Nóbelsverðlaunahafi í hagfræði árið 2001, sem beindu augum að hegðan fyrirtækja á fákeppnismarkaði.¹⁴ Þeir sýndu hvernig fyrirtæki í ófullkominni samkeppni geta aukið hagnað sinn með því að breyta kostnaðarsamsetningu sinni, jafnvel þótt það leiði til þess að framleiðslukostnaður á hverja einingu aukist fyrir vikið. Til dæmis getur fyrirtæki tekið staðfasta ákvörðun um að framleiða mikið magn með því að fjárfesta í nýrri verksmiðju og lækka þannig jaðarkostnaðinn, þótt heildarkostnaður hækki, því að vitneskjan um að fyrirtæki búi yfir mikilli ónýttri framleiðslugetu og lágum jaðarkostnaði getur dregið kjarkinn úr keppinautunum og haldið aftur af ágengni þeirra á markaði.

Annað dæmi um strategíska staðfestu má taka af hegðan stjórnenda peningamála. Aðalatriðið hér er að stundum getur verið heppilegra fyrir kjósendur og stjórnámálamenn að láta stjórnendur seðlabanka um að móta stefnuna í peningamálum þar sem þeir líta öðruvísi á aðstæður hverju sinni og eru staðfastari. Aðilar á markaði – fyrirtæki og verkalýðsfélög – miða verðlagningu og kaupkröfur sínar m.a. við þá peningamálastefnu sem þeir telja að verði fylgt í framtíðinni. Þess vegna er

12. Látum θ vera líkurnar sem land 1 telur vera á því að land 2 telji vænlegast að hervæðast án tillits til þess hve mikil ógn stafi af gagnárás. Ef $\pi < \pi^*$ mun land 2 ávallt kjósa hervæðingu. Ávinningur lands 1, $(1-\pi)c$ er því minnkandi fall af π . Ef $\pi > \pi^*$ verður væntur ávinningur lands 1 jafn $\theta(1-\pi)c + (1-\theta)b$ sem einnig er minnkandi fall af π . Fælingarstefna ($\pi = \pi^*$) verður því aðeins heppilegasta stefna lands 1 ef og aðeins ef $\theta(1-\pi^*)c + (1-\theta)b$ er að minnsta kosti jöfn stærð og sá ávinningur (c) sem landið hefur af því að gera ekki gagnárás ($\pi = 0$), eða – sett fram á annan hátt – ef og aðeins ef $\theta \leq (1-c/b)/(1-c/a)$.

13. Í leikjafræði visar hugtakið útvíkkuð gerð til yfirlits yfir alla hugsanlega leiki, allar leiðir sem leikurinn getur borist og samsvarandi leikslök. Nash-jafnvægi í útvíkkaðri gerð er undirleiksfullkomið ef það skapar Nash-jafnvægi í öllum undirleikjum. Til að Nash-jafnvægi myndist verður leikurinn að vera leikinn á hagstæðasta hátt og þess vegna getur Nash-jafnvægi hvílt á „hótunum“ og „loforðum“ sem ekki ganga eftir. Í fullkomnu undirleiksjafnvægi er búið að vinsa burt þau Nash-jafnvægi sem þannig myndast.

14. Sjá Spence (1977) og Dixit (1980).

heppilegra fyrir þá að styrk hönd haldi um stýri peningamála, jafnvel þótt stjórnáamenn myndu hugsanlega ætíð taka ákvarðanir sem endurómuðu hagsmunum almennings hverju sinni.¹⁵

Fyrir getur komið að hagsmunaárekstrar virðist svo gríðarlegir að engin lausn sé í sjónmáli. Það sem kemur einstaklingum best getur hæglega reynst afar óheppilegt fyrir einhvern tiltekinn hóp sem einstaklingar tilheyra. Sá ávinningur sem hægt er að hafa af því til skamms tíma að ganga á bak orða sinna getur verið mun meiri en það óhagræði og skömm er af því hlýst. Schelling bendir á að því aðeins sé hægt að láta fólk standa við samninga að aðilar geri sér ljóst að í framtíðinni verður ekki samið við þá sem ekki reynast traustsins verðir, og að ávinningurinn af því að viðhalda orðsporinu sem traustur samningsaðili sé verðmætari en sá skammtímaávinningur sem hafa má af svikulu framferði.¹⁶ Framsýnir einstaklingar sem þurfa sífellt að eiga í samningum hvor við annan gera sér vel ljóst að hagsmunum þeirra beggja er best borgið ef þeir viðhalda samvinnunni. Og Schelling vakti athygli á því að jafnvel þótt ekki væri útlit fyrir frekari samningagerð í framtíðinni gæti verið heppilegt fyrir aðila að skipta núverandi samningagerð í nokkur skref og skapa með því þörf fyrir gagnkvæmt traust. Á þann hátt væri hægt að minnka hættuna á að annar hvor aðilinn hlypi út undan sér.

Á þeim árum sem Schelling setti fram hugsanir sínar og vangaveltur hafði leikjafræðin ekki þróast nægjanlega til þess að hann gæti vafið þeim inn í stærðfræðileg líkön og jafnvel sannað þær. En er fram liðu stundir fleygði rannsóknum manna fram á þessu sviði og með endurteknum leikjum (e. *repeated games*) og alþýðukenningum (e. *folk theorems*) var hægt að sýna fram á að óttinn við erjur í framtíðinni gæti knúið fólk til samvinnu. Þó leið stundum langur tími þar til að hægt var að sanna kenningar Schelling stærðfræðilega. Þannig

liðu meira en fjórir áratugir þar til að fræðimenn sýndu fram á að til þess að viðhalda samkomulagi væri stundum hægt að hluta eitt samvinnuverkefni niður í smærri búta. Lockwood og Thomas (2002) sönnuðu að í leik tveggja aðila myndu einstaklingar bjóða fram meiri almennagæði (e. *public goods*) ef þeir skiptust á um að leggja lítið í púkkið fremur en ef þeir inntu hvor um sig sitt framlag af hendi í einu.¹⁷ Ástæðan er sú að þegar þeir þurfa að smáhækka framlag sitt eru þeir í raun alltaf að gera gagnkröfu hvor til annars um að halda áfram að leggja sitt af mörkum. Hvor um sig getur hótad því að stöðva framlög sín sýni hinn aðilinn ekki lit; það er gúlrotin sem þeir veifa hvor framan í annan. Til að framboð þeirra af almennagæðunum sé skilvirkt í þeirri merkingu að það sé nákvæmlega það magn sem væri í boði á markaði án markaðsbresta er þó nauðsynlegt að setja fram nokkur ströng skilyrði í viðbót. Gale (2001) benti t.d. á að nauðsynlegt væri að engin afvöxtun ætti sér stað, þ.e. að engin ávöxtunarkrafa væri gerð, og Marx og Matthews (2000) sýndu fram á að ávinningsföllin (e. *payoff function*) mættu ekki vera slétt (e. *non-smooth*). Þessar kenningar geta hugsanlega útskýrt hvers vegna stundum er nauðsynlegt að fara sér hægt þegar um er að ræða samvinnuverkefni sem dýrkeypt getur reynst að snúa bakinu við. Þetta á til dæmis við um afvopnun, samvinnu á sviði umhverfismála og samdrátt í framleiðslugetu á markaði sem er að dragast saman.

En það er ekki aðeins hjá mannskepnunni sem ákveðin samvinna á sér stað sem stigin er í nokkrum skrefum. Líffræðingurinn John Maynard Smith hefur lýst æxlun hjá kóralbassa (e. *black hamlet*) sem er tvíkynja fiskur er lifir í kringum kóralrif og framleiðir bæði hrogn og svil.¹⁸ Þegar æxlun á sér stað fer fram flókið ferli þar sem fiskar skiptast á að leika hæng og hrygnu og losa ýmist hrogn eða leggja svil yfir hrognin. Þetta sérkennilega háttaleg hefur verið skýrt með því að auðveldara sé að framleiða svil en hrogn, og

15. Finn Kydland og Edward Prescott, sem hlutu Nóbelsverðlaunin í hagfræði árið 2004, voru m.a. verðlaunaðir fyrir rannsóknir sínar á mikilvægi trúverðugleika og staðfestu í hagstjórn. Rannsóknir annarra þjóðhagfræðinga á fulltrúavaldi hvíla að verulegu leyti á brautryðjendastarfi þeirra. Sjá t.d. Rogoff (1985).

16. Schelling (1956), bls. 301.

17. Admati og Perry (1991) voru fyrstir til að takast beint á við þetta rannsóknarverkefni en nálgun þeirra var nokkuð sértæk og staðfesti ekki kenningar Schelling nema að takmörkuðu leyti.

18. Maynard Smith (1982), bls. 159-160.

Þess vegna sé óvíst að sá sem myndi leika hæng í fyrstu umferð og leggja svil yfir hrogn maka síns, myndi vilja framleiða hrogn í þeirri næstu, heldur sé allt eins líklegt að hængurinn myndi þess í stað leita að hrognum sem annar fiskur hefði hrygnt og frjóvga þau. En ef fiskarnir losa ekki öll hrognin í einu er kominn grundvöllur fyrir samvinnu. Þá geta fiskar ákveðið að losa hrogn til skiptis og skiptast jafnframt á að leggja svil yfir þau. Með þessu móti er dregið úr líkum þess að fiskar svíkist um að framleiða og losa hrogn og viðkoma stofnsins betur tryggð.

Í samfélagi manna má finna mörg dæmi um samskipti þar sem litlir sem engir hagsmunarárekstrar eiga sér stað. Schelling hefur sýnt samskiptum af þeim toga töluverðan áhuga og nefnir leiki af þeirri tegund hreina samhæfingarleiki (e. *pure coordination*). Í þessum leikjum vilja allir einhvers konar samvinnu, en öllum er í raun sama hvers eðlis sú samvinna er að því gefnu að hún skili árangri. Það skiptir t.d. litlu máli fyrir hóp verkamanna hvernig þeir skipta með sér störfum innbyrðis svo fremi sem hópurinn nær að ljúka verki sínu. Samvinnan er því árangursríkari sem aðilar eiga auðveldara með að hafa samskipti hver við annan, en án samskipta er hætt við að samvinnan renni út í sandinn. Með því að gera ýmsar tilraunir á nemendum og samstarfsmönnum komst Schelling að því að fólk gat stundum samhæft aðgerðir sínar nokkuð vel án þess að til formlegra samskipta kæmi, jafnvel þótt um væri að ræða flókna leiki með mörgum Nash-jafnvægjum. Í einum leiknum voru aðilar t.d. beðnir um að velja jákvæða, heila tölu. Þeir voru verðlaunaðir ef þeir völdu báðir sömu tölu, en fengu annars enga umbun. Flestir sem tóku þátt í þessum leik völdu töluna einn sem er minnsta, jákvæða heiltalan. Schelling gerði einnig tilraunir með leiki þar sem þátttakendur gátu nýtt sér atriði er lúta að samhengi leikjanna, sameiginleg viðmið og innlifun til að finna heppilegasta jafnvægi þeirra.¹⁹ Líklegt má telja að margar félagslegar hefðir og skipulag hafi komist

á vegna þess að það auðveldar samhæfingu. Heimspekingurinn David Lewis notfærði sér rannsóknir og hugmyndir Schelling um gildi samhæfingar í leikjum sem snúast um sameiginlega hagsmuni til að setja fram hina djörfu kenningu sína um að tungumál hafi þróast sem ákveðin siðvenja.

Að endingu er rétt að kynna til sögunnar leiki þar sem tekin eru fyrir vandamál sem skapast í samskiptum þegar aðilar vantroysta hvor öðrum. Hershöfðingjar nokkrir eru sammála um að stríð sé óheppilegt og þeir munu því báðir halda friðinn ef þeir eru vissir um friðsamlegan ásetning hvor annars. En ef annar þeirra grunar hinn um græsku og telur hann vera í ófriðarhug er best fyrir hann að búa sig líka undir stríð. Hér er gengið út frá því að stríð sé skárri kostur en að vera hersetinn.²⁰ Svo sem Schelling benti sjálfur á setti Xenófon þetta fram á skýran hátt þegar á fjórðu öld fyrir Krist.²¹ Það var hins vegar framsetning Wohlstetter (1959) er varð kveikjan að greiningu Schelling sem setti vandamálið fram á leikjafræðilegan hátt og sýndi hvernig tortryggni gæti alið af sér árás. Tafla 2 sýnir ávinning þann sem hvort land um sig hefur af friðsamlegri sambúð, stríði og hersetu. Best er að lifa í friði við nágranna sinn, en verst að vera hersetið land.

Tafla 2

	<i>Stríð</i>	<i>Friður</i>
Stríð	2,2	3,0
Friður	0,3	4,4

Báðir hershöfðingjar geta valið á milli stríðs og friðar. Það eru tvö Nash-jafnvægi í þessum leik (stríð, stríð) og (friður, friður). Ef báðir eru skynsamir, fylgja áætlun sinni út í ystu æsar og eru ekki í vafa um ávinning andstæðings síns, taldi Schelling líklegast að friður myndi ríkja, en sumir leikjafræðingar hafa verið á annarri skoðun.²² En Schelling viðurkenndi einnig að ef hershöfðingjarnir væru örlítið óöruggir um

19. Aðrir hafa einnig reynt að finna hvað ræður því hvernig samhæfing kemst á. Sjá t.d. Mehta, Starmer og Sugden (1994a, 1994b). Gott yfirlit er að finna í Camerer (2003) og Binmore og Samuelson (2005) er ágætis, nýleg fræðileg bók.

20. Svo var ekki í dæminu áður; þar var stríð verst kosturinn.

21. Schelling (1966), bls. 261.

22. Schelling (1966), bls. 210.

fyrirætlanir andstæðingsins gæti sú taugaveiklu hæglega smitað út frá sér og hrundið af stað styrjöld.²³ „Ef ég heyri hávaða á neðri hæð húss míns að nóttu til og fer niður með byssu í hendi og stend skyndilega augliti til auglits við vopnaðan innbrotsþjóf er afar sennilegt að sá fundur geti haft í för með sér afleiðingar sem hvorugur okkar hafði í hyggju. Þjófinn getur langað mest af öllu til að trítla aftur út og kannski væri það einnig það sem ég sjálfur vildi helst að gerðist næst, en hann gæti haldið að ég ætlaði að skjóta sig og hugsað með sér að þess vegna væri betra að verða fyrri til. Hann gæti jafnvel haldið að ég teldi líklegt að hann ætlaði að skjóta mig og viljað þess vegna hleypta af á undan.“ Schelling reyndi að greina þann vanda sem skapast við svona aðstæður á formlegan hátt, en vegna þess að leikjafræðin hafði á þeim árum ekki þróast nægjanlega langt til að geta glímt við vandamál þar sem upplýsingar eru takmarkaðar, náði hann aldrei að setja hugsun sína og innsæi í réttan fræðilegan buning.²⁴

Bókin *The Strategy of Conflict* hafði mikil og viðvarandi áhrif á hagfræðinga og aðra fræðimenn á sviði félagsvísinda. Hún varð meðal annars leiðarljós mörgum sem hafa rannsakað hvernig staðið var að samningaviðræðum á ýmsum viðkvæmum tímum í sögunni.²⁵ Sú bók og þær sem á eftir fylgdu – *Strategy and Arms Control* (1961), er Schelling skrifaði ásamt Morton Haplerin og *Arms and Influence* (1966) – höfðu einnig mikil áhrif á herfræðinga og aðra sem lögðu á ráðin á tímum kalda stríðsins. Skrif Schelling lögðu einnig grunninn að fræðigrein sem nefnd hefur verið herstjórnarfræði. Með góðum rökum má einnig halda því fram að rannsóknir Schelling hafi haft mótandi áhrif á fælingarstefnu stórveldanna og gagnkvæma afvopnun þeirra.²⁶

23. Sama rit, bls. 207.

24. Baliga og Sjöstrom (2004) settu nýlega fram formlega greiningu á þessum aðstæðum.

25. Sjá t.d. Snyder og Diesing (1977).

26. Vegna þeirrar miklu leyndar sem óhjákvæmilega hvílir oft yfir hernaðarmálefnum er örðugt að glöggva sig til fulls á framlagi Schelling. Það hefur þó líklega verið mikið, eins og best má sjá af því að árið 1993 var hann verðlaunaður sérstaklega af bandarískum stjórnvöldum fyrir þátt sinn í rannsóknum á hegðunarfræði og hvernig hægt væri að nýta þá þekkingu til að koma í veg fyrir kjarnorkustríð.

2.2 Rannsóknir á öðrum sviðum

Á þeim 45 árum sem liðin eru frá því að bókin *The Strategy of Conflict* kom út hefur Schelling sett fram margar og nýstárlegar hugmyndir. Hér skal minnst á tvær þeirra.

Vandamál borgarhverfa þar sem býr fólk af ólíkum kynstofni er viðfangsefni Schelling í grein sem hann skrifaði árið 1971 og hefur síðan mikið verið vitnað í. Schelling er sérstaklega umhugað um að lýsa því hvað gerist þegar hlutfall fólks af einum kynstofni fer niður fyrir ákveðið kritískt gildi og hvernig sú staða getur leitt til aðskilnaðarvandamála. Fólk getur verið fráhverft því að búa í hverfi þar sem kynstofn þess er í minnihluta án þess að æskja þess endilega að vera þar í meirihluta. Þess vegna geta litlar breytingar á valkostaröðun einstaklinga haft veruleg áhrif á samfélagið í heild. Auk þess að skýra betur ákveðið félagslegt vandamál var greining Schelling ein af fyrstu félagslegu athugunum sem gerðar voru á því fyrirbæri er nefna má vendipunkta (e. *tipping*) og lýsir hraðri færslu frá einu jafnvægi til annars. Schelling skoðaði marga slíka vendipunkta í annarri bók sinni *Micromotives and Macrobehavior* er út kom árið 1978 og aðrir félagsvísindafraeðingar hafa síðan fylgt í kjölfarið.

Á níunda áratugnum skrifaði Schelling nokkrar greinar sem fjalla um sjálfstjórn einstaklinga.²⁷ Hér beindi hann athygli sinni að því að einstaklingar hegða sér stundum öðruvísi en þeim væri fyrir bestu; reykja og drekka of mikið og hreyfa sig og spara of lítið. Schelling verður einkum starsýnt á það hve sjálfstjórn einstaklinga er takmörkuð og hvaða afleiðingar sú staðreynd geti haft á stefnu stjórnvalda. Hér benti Schelling á að nauðsyn þess að sýna trúverðuga staðfestu er engu minni en þegar um er að ræða deilur á milli einstaklinga eða ríkja líkt og þær sem rannsóknir hans beindust einkum að í upphafi ferils hans. Á síðustu áratugum hafa æ fleiri hagfræðingar látið til sín taka á þessu sviði, ekki síst eftir að hegðunarhagfræði tók að vaxa fiskur um hrygg.²⁸ Fjölmargar greinar hafa

27. Schelling (1980, 1983, 1984a og 1992). Fyrstu tvær greinarnar voru síðan birtar aftur í Schelling (1984b).

28. Fyrstu skrif um þetta efni má rekja til Strotz (1956) og Phelps og Pollak (1968).

birst í virtum hagfræðitímaritum þar sem fjallað er um spurningar svo sem þær af hverju einstaklingar spari ekki meira og borði ekki hollari mat.

Í stuttu máli hefur „ráðvillti hagfræðingurinn“ eins og Schelling hefur stundum nefnt sjálfan sig í raun reynst vera fyrsta flokks leiðsögumaður.

3. Aumann

Robert Aumann hefur einnig mótað leikjafræðina að miklu leyti, einkum með því að nota þætti úr svo ólíkum fræðigreinum sem hagfræði, stjórnmálafræði, líffræði, heimspeki, tölvunarfræði og tölfræði til að setja fram ákveðna heildarsýn sem hann hefur mjög haldið á lofti. Þessa almennu aðferðafræði hefur hann síðan notað til að skoða viðfangsefni á borð við fælingu, fullkomna samkeppni, fákeppni, skattheimtu og atkvæðagreiðslur. Rannsóknir hans einkennast öðru fremur af ótrúlegri fjölbreytni og djúpri hugsun. Stundum er greining hans afar stærðfræðileg og flókin en þess á milli er framsetningin einföld en hugmyndin aftur á móti djúpsæ. Í meginverkum sínum hefur Aumann bæði útskýrt hið innbyggða samræmi í rökvisi leikjafræðinnar og útvíkkað þau svið þar sem hægt er að beita leikjafræðilegri hugsun.

3.1 Langtímasamvinna

Meðal þeirra framlaga Aumann sem hafa haft hvað mest áhrif á félagsvísindi eru rannsóknir hans á eðli langtímasamvinnu. Eins og áður hefur verið bent á eru mannleg samskipti iðulega langvinn í eðli sínu og eiga sér oft stað um óákveðinn tíma. Sem dæmi má nefna að sum lönd geta átt möguleika á að hagnast eitthvað á kostnað nágretta sinna. Fyrirtæki sem eiga í samkeppni hvert við annað miða ákvarðanir sínar um magn og verð gjarnan við fyrri hegðan samkeppnisaðila sinna. Bændur geta ákveðið að nýta í sameiningu náttúrulega auðlind, svo sem heiðarheit eða vatnsból. Til þess að skilja þessi samskipti til hlítar er því nauðsynlegt að skoða þau í langtímasamhengi.

Muninn á eðli samskipta til skamms og langs tíma er líklega heppilegast að útskýra með hinu sígilda vandamáli fanganna (e. *prisoners' dilemma*). Þetta er leikur tveggja einstaklinga – fanga – sem hvor um sig hefur tvær hreinar áætlanir; samvinnu (C) eða svik (D). Þeir taka báðir í einu ákvörðun

um hvort þeir ætla að hafa samvinnu eða svíkja hvor annan. Hvor um sig hefur sömu ráðandi áætlunina D, þ.e. D er heppilegasta áætlunin óháð því hvað hinn gerir, en þeir hagnast mest á því að velja báðir C. Ef leikurinn er aðeins leikinn einu sinni leikur enginn vafi á því hvert Nash-jafnvægið er; útkoman getur aðeins orðið sú að þeir segja hvor til annars. Heppilegra hefði hins vegar verið fyrir þá báða að steinþegja. Niðurstöður leiksins getur að líta í töflu 3.²⁹ Þeir hagnast báðir um 2 ef hvorugur kjaftar frá, en um 1 ef þeir svíkja hvor annan. Ef annar þegir þunnu hljóði en hinn svikur er ávinningur svikarans 3 en hinn situr í súpunni.

Tafla 3

	C	D
C	2,2	0,3
D	3,0	1,1

Gefum okkur nú að þessir tveir aðilar komi saman á hverjum degi og leiki alltaf þennan sama leik, dag eftir dag, allt til eilífdarnóns. Markmið leiksins nú er að hámarka meðalávinninginn á hverjum degi um ófyrirsjáanlega framtíð. En núna borgar sig ekki lengur að svíkja vin sinn heldur öllu fremur sýna ætíð góða samvinnu. Ástæðan er sú að nú geta þeir báðir hóttað því að svíkja næst ef þeir verða sviknir núna. Sá skammtímaávinningur sem hægt er að hafa af svikulu framferði í dag verður því lítill miðað við þann langtímahag sem hafa má af góðri samvinnu.

En Aumann gerði gott betur en þetta. Hann sannaði einnig almenna niðurstöðu um ofurleikinn G^* sem samanstendur af óendanlega mörgum endurtekningum af einhverjum þrepaleik (e. *stage game*) G .³⁰ Í hnotskurn felur niðurstaðan í sér að hver sá meðaltalsávinningur sem telst fýsilegur í

29. Hér er gert ráð fyrir að ávinningurinn sé í raun Neumann-Morgenstern-nyt (e. *utilities*) og endurspeglir því algjörlega hvað hvetji keppandann til að leika þennan leik. Ef ávinningurinn væri peningalegur er alveg hugsanlegt að skynsömum þátttakanda mundi vera svo umhugað um að rýra ekki tekjur andstæðingsins að hann veldi fremur C.

30. Aumann (1959).

ofurleiknum og gengur ekki gegn því sem kalla má takmarkaða skynsemi (e. *bounded rationality*) í þrepaleiknum G geti verið varanlegt Nash-jafnvægi í G^* . Aumann sannaði ennfremur að þetta gildir þótt gerð sé sú stranga krafa að sérhver niðurstaða sé óháð því hvort einhver hópur eða bandalag leikmanna breyti um leikáætlun í miðjum leik.

Þessa niðurstöðu er rétt að setja fram á ögn nákvæmari hátt. Byrjum á því að skilgreina hreina leikáætlun í G^* sem þá ákvörðunarreglu sem býr til hreina leikáætlun í G á sérhverju tímabili og á öllum þeim tímabilum sem liðið hafa fram að því. Þar af leiðir að fjöldi hreinna leikáætlana í G^* er óendanlegur og felur í sér afar flókna herfræði. Aðalniðurstaða greinarinnar er nákvæm skilgreining á eðli hinna svokölluðu ströngu jafnvægisávinninga (e. *strong equilibrium payoffs*) í G^* .³¹ Jafnvægisávinningur er hugtak sem Aumann (1959) setti fram og vísar til lýsingar á ákveðinni áætlun sem felur í sér að enginn hópur (hluti, bandalag) þátttakanda getur aukið ávinning allra sem tilheyra hópnum með því að breyta eigin leikáætlun.³² Við þessar aðstæður er Nash-jafnvægi hið sérstaka tilvik þegar aðeins einn þátttakandi er í sérhverjum þeim hópi sem breytir af leið. Aumann leiddi út að mengi hinna ströngu ávinningajafnvægja er hið sama og svonefndur β -kjarni (e. β -core) í leiknum G sem stendur yfir þá og þá stundina. Í β -kjarna, sem er ákveðin tegund af kjarna hvers leiks, er þess krafist að enginn hópur geti knúið fram meiri ávinning, jafnvel þótt aðrir í leiknum myndu allir saman snúast gegn þeim.

Sönnun Aumann má yfirfæra á marga hópa, sem hver um sig er aðeins með einum þátttakanda, er snúa af leið og er þá talað um alþýðukennisetninguna (e. *folk theorem*) fyrir endurtekna leiki. Sú setning kveður svo á að mengi Nash-ávinningajafnvægja fyrir endalaust endurtekinn leik G^* sé hið sama og mengi þeirra ávinninga sem er fýsilegt og skynsamlegt út frá sjónarhóli einstaklingsins. Sagt er að ávinningsvektor (e.

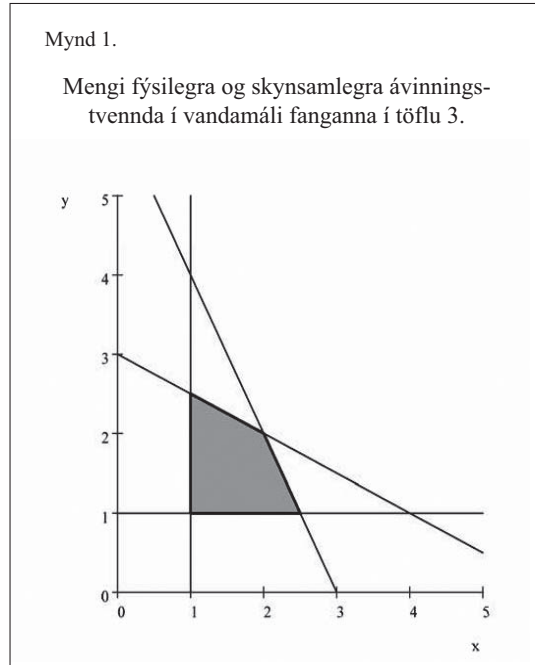
payoff vector), sem skilgreindur er sem röð ávinninga fyrir sérhvern þátttakanda í leiknum, sé fýsilegur ef hann er kúpt samsetning (e. *convex combination*) af ávinningsvektorum sem hægt er að ná fram með hreinum leikáætlunum í G^* . Ávinningur telst skynsamlegur fyrir sérhvern einstakling ef hann er ekki minni en minnsti ávinningur í G sem aðrir geta þvingað upp á þennan tiltekna einstakling.³³ Á þennan hátt er hægt að leggja niður ákveðnar áætlanir í G^* sem líta má á sem ógnun við allar tilraunir til að víkja frá þeim áætlunum í G^* sem valda því að hægt sé að ná hinum tiltekna ávinningsvektor.

Lítum aftur á vandamál fangans sem kynnt var til sögunnar í töflu 3. Byrjum á því að skilgreina hugtakið ávinningstvenndir, en það vísar til þess ávinnings sem báðir keppendur hafa af tilteknum leik. Ef báðir keppendur ákveða t.d. að þegja má rita ávinningstvenndina sem (2,2) og (1,1) ef þeir svíkja hvor annan. Mengi hinna fýsilegu og skynsamlegu ávinninga fyrir báða keppendur samanstandur af öllum þeim ávinningstvenndum sem skilgreina má sem kúpta samsetningu af ávinningstvenndunum í töflu 3 og hafa í för með sér meira en 1 í ávinning fyrir annan hvorn aðilann. Skoðum þetta aðeins nánar. Hvor keppandi um sig er viss um að hafa aldrei minna en 1 upp úr krafsinu með því að svíkja hinn. Jafnframt er ljóst að í þessu tilviki eru fjórar hreinar leikáætlanir til staðar og séu þær valdar verður útkoman (2,2), (1,1), (3,0), (0,3). Mengi hinna fýsilegu ávinningstvennda má þá skoða sem ferhyrninginn sem myndast við skurðpunkt línanna sem lýsa þessum leikáætlunum. Þessi ferhyrningur er dekkur á mynd 1. Þessar ávinningstvenndir – og engar aðrar – má einnig líta á sem meðaltal þess ávinnings sem myndast í Nash-jafnvægi þegar þessi leikur er endurtekinn óendanlega oft.

31. Aumann skilgreinir ávinning í G^* með því að taka meðaltal ávinninga í G yfir ákveðið tímabil.

32. Svona jafnvægi er ekki til í öllum leikjum.

33. Mengi þessara ávinninga má skilgreina á eftirfarandi hátt: Látum viðkomandi keppanda svara allri hugsanlegri samsetningu af (hreinum eða blönduðum) leikáætlunum með því að velja sjálfur (hreina eða blandaða) leikáætlun. Það svar sem gefur honum minnstan ávinning er þá lágmark þess ávinnings sem hann getur borið úr bítum með skynsamlegum leik.



Alþýðukennisetningunni má einnig beita á leikinn sem lýst var í töflu 1. Hér má sýna fram á að allar ávinningstvenndir sem eru kúptar samsetningar af tvenndunum $(0,0)$, (a,c) , (c,a) og (b,b) og þar sem ávinningur er aldrei minni en c er hægt að líta á sem meðaltöl af ávinningi í Nash-jafnvægi þegar leikurinn er leikinn óendanlega oft. Hina „góðu“ niðurstöðu (b, b) má nú fá fram, jafnvel þótt hún sé ekki jafnvægislausn þegar leikurinn er aðeins leikinn einu sinni. Þeim aðila sem ætlar að hlaupast undan merkjum og leika öðruvísi en heppilegast er fyrir báða þátttakendur má nú hóta með því að þeirri stefnu verði mætt með því að velja þá áætlun sem lágmarkar ávinning hans. Í þessu felst að sá sem ætlar að svara velur af handahófi á milli þeirra tveggja hreinu leikáætlana sem hann hefur – 0 og b – í því skyni að lágmarka þann vænta ávinning sem sá er víkur af leið hefur af því að svara útpili þess sem refsar. Með því að reiða þannig refsivöndinn til höggs er hægt að búa til ný og haldbær jafnvægi ef leikurinn er leikinn óendanlega oft. Í fangaleiknum gæti t.d. sá sem vildi halda hinum við efnið og koma í veg fyrir að sá færi út af réttri leið ákveðið að velja

ýmist C og D eftir fyrirfram ákveðinni áætlun. Í flóknari leikjum er hugsanlegt að hefnistefnan geti jafnvel þrýst ávinningi keppenda um stundarsakir niður fyrir þann ávinning sem myndaðist við Nash-jafnvægi í þrepaleiknum G . Tökum dæmi af hegðan fyrirtækja á fákeppnismarkaði. Þar gætu fyrirtæki hegnt þeim sem héldu sig ekki við samkomulag um takmarkað framboð með því að setja mikið magn vöru sinnar á markað og þar með þrýsta hagnaði niður í ekki neitt.

Áður en Aumann setti kenninguna um alþýðukennisetninguna formlega fram höfðu margir leikjafræðingar á sjötta áratugnum látið að því liggja að skynsamir keppendur ættu að geta haft með sér samvinnu – og t.d. valið C í fangaleiknum – ef leikurinn væri endurtekinn nægjanlega oft.³⁴ Sú viska þótti þjóðsagnakennd og þaðan er nafn kennisetningarinnar – alþýðukennisetningin – dregið. Schelling (1956) var meðal þeirra sem trúðu staðfastlega þessum fróðleik og leit svo á að þessi setning hefði mikla hagnýta þýðingu. Aumann setti alþýðukennisetninguna hins vegar fram á nákvæman og formlegan hátt og sannaði hana og ruddi þar með brautina fyrir frekari rannsóknir á langtímasamskiptum. Friedman (1971) þrjónaði seinna afar nytsama viðbót við endurtekna leiki, sem byggist á þeirri forsendu að aðilar geri litla ávöxtunarkröfu þegar þeir núvirða framtíðarávinning sinn. Þá er hægt að sýna fram á að niðurstöður sem hafa í för með sér meiri ávinning fyrir alla þátttakendur en þeir myndu hafa af því Nash-jafnvægi sem verður til þegar hreinni leikáætlun er haldið til streitu í þrepaleiknum G , geta myndað jafnvægi í leik sem er endurtekinn óendanlega oft.

Á árunum 1965-1968, þegar kalda stríðið var í algleymingi, unnu Robert Aumann, Michael Maschler og Richard Stearns saman að rannsóknum á kvikleika samningaviðræðna um takmörkun vígbúnaðar. Með því lögðu þeir grunninn að kenningum um endurtekna leiki þar sem upplýsingar eru takmarkaðar, þ.e. þegar aðeins sumir eða engir þátttakendur í leiknum vita

34. Sjá kafla 5.5 í Luce og Raiffa (1957).

hvaða þrepaleik verið er að leika hverju sinni.³⁵ Sem dæmi um leik af þessu tagi má nefna fyrirtæki sem er ekki kunnugt um framleiðslukostnað keppinautarins, eða ríki sem hefur ekki fullnægjandi upplýsingar um vopnabúr óvinarins eða hvaða augum óvinurinn lítur þá valkosti sem í boði eru. Og þremmingarnir juku enn á leikjaflækjuna með því að bæta við einni vídd: Hvaða hvata hafa aðilar til að fela eða gera heyrinkunnar upplýsingar sem þeir búa yfir? Og hvernig myndi aðili sem réði yfir slíkum upplýsingum notfæra sér þá stöðu? Hvernig gæti sá sem ekkert veit púslað saman upplýsingum sem annar býr yfir með því að grandskoða hvernig sá hinn sami hefur hegðað sér áður? Ætti sá sem er vel upplýstur að notfæra sér þekkingu sína til að hagnast vel núna og hætta á að andstæðingarnir taki eftir hvað hann veit mikið, eða fela hönd sína í þeirri von að ávinningurinn geti orðið enn meiri seinna? Til að svara þessum spurningum og öðrum skyldum leituðu Aumann, Maschler og Stearns í smíðju John Harsanyi og um afrakstur þeirra rannsókna má lesa í Aumann og Maschler (1995).

Aumann og Shapley (1976) og Rubinstein (1976, 1979) hafa haldið áfram athugunum á endurteknum leikjum með fullkomnum upplýsingum og sýnt fram á að allar fýsilegar og skynsamlegar niðurstöður út frá sjónarhóli einstaklingsins megi líta á sem fullkomin undirleiks- Nash-jafnvægi. Þegar um er að ræða leiki sem eru endurteknir óendanlega krefst oft fullkomið undirleiksjafnvægi þess að þótt þátttakendur víki allir af jafnvægisleið leiksins muni þeir allir hafa hvata til að leika eins og þeir myndu gera í jafnvægi. Undirleiksjafnvægi mun, nánar tiltekið, fela í sér að enginn þátttakandi muni nokkru sinni hafa hvata til að hætta við að refsa öðrum sem víkur af rétttri leið, né heldur að hætta við að refsa aðila sem hættir við að refsa öðrum o.s.frv. Það er ekki sjálfgefið að Nash-jafnvægi séu undirleiksfullkomin, og það var heldur ekki ljóst að svo stíf endurbót á leikjafræðinni myndi ekki breyta öllu mengi þess ávinnings sem hafa má í Nash-jafnvægi í ofur-

leik. Aumann og Shapley sýndu raunar að ef aðilar afvaxta ávinning framtíðarinnar og stefna að því að hámarka vænt núvirði ávinnings síns um alla framtíð, mun útkoman í undirleiksfullkomnu jafnvægi vera mun lakari en sú sem leiða myndi af því að ávallt væri leikið upp á Nash-jafnvægi. Mælikvarðinn á því hvað telst Nash-jafnvægi er ekki háður „kostnaðinum“ við að refsa þeim sem hvika af leið, en það gerir aftur á móti mælikvarðinn á hvað telst undirleiksfullkomið.

Fræðigreinin um endurtekna leiki hefur fengið byr undir báða vængi á undanföllum fjórum áratugum og þær kenningar sem fram hafa verið settar hafa dýpkað skilning á því hvaða skilyrði verða að vera til staðar til að samvinna geti átt sér stað til lengdar. Abreu (1988) sýndi fram á hvernig best væri að koma við refsingum og í framhaldinu hefur reynst auðveldara að finna mengi varanlegs jafnvægisávinnings í endurteknum leikjum. Fudenberg og Maskin (1986) endurbættu alþýðukennisetninguna fyrir undirleiksfullkomin jafnvægi í endurteknum leikjum þegar um er að ræða afvöxtun og endanlegan fjölda þátttakenda. Aumann og Sorin (1989) sýndu að vegna þess að minni þátttakenda er takmarkað mun mengi jafnvægja takmarkast við þau sem eru félagslega skilvirk. Þá hafa Abreu, Dutta og Smith (1994) sýnt hvað einkennir leiki sem alþýðukennisetningin á við þegar um er að ræða óendanlega margar endurteknir og afvöxtun.

Sem dæmi um undirleiksfullkomið jafnvægi í leik sem er leikinn óendanlega oft og þar sem afvöxtun er beitt má taka markað þar sem er n fjöldi fyrirtækja. Ekkert þeirra hefur fastan framleiðslukostnað og jaðarkostnaður allra er c . Þau selja öll sömu vöruna og eiga í stöðugu og kviku verðstríði. Í upphafi hvers tímabils ákveða fyrirtækin vöruverð sitt og kaupendur kaupa eingöngu vöru af því fyrirtæki eða fyrirtækjum sem bjóða hagstæðasta verðið og skipta kaupum sínum jafnt á milli þeirra fyrirtækja. Ef viðskipti á markaði ættu sér aðeins stað einu sinni myndi útkoman verða sú hin sama og alþekkt er úr byrjendabókum í hagfræði að verð væri jafnt jaðarkostnaði, $p = c$. En ef viðskipti eiga sér stað yfir lengra tímabil og hagnaður framtíðar er færður til núvirðis með afvöxtun eru mörg önnur jafnvægi hugsanleg, svo

35. Sjá Aumann og Maschler (1966, 1967, 1968), Stearns (1967) og Aumann, Maschler og Stearns (1968).

fremi sem ávöxtunarkrafan sé ekki of mikil. Það er til dæmis hugsanlegt að öll fyrirtækin ákveði í upphafi verð sem er jafnt því verði sem einkasali myndi setja, $p > \hat{p}$, og haldi síðan fast í það verð þangað til að í ljós kemur að einhver hefur vikið af þessari leið. Þá breyta öll fyrirtækin verði sínu og setja það jafnt jaðarkostnaði, $p = c$. Þessi hegðan myndi samsvara undirleikisfullkomnu jafnvægi ef $\delta > 1 - \frac{1}{n}$ þar sem $\delta \in (0, 1)$ er afvöxtunarstuðullinn, þeir vextir sem notaðir eru til að færa hagnað framtíðar til núvirðis.³⁶ Af skilgreiningu á δ í jafnvægi má ráða að afvöxtunarstuðullinn verður hærri eftir því sem fjölgar í hópi fyrirtækja á markaði, eftir því sem n stækkar. Ástæðan er sú að eftir því sem fyrirtækjum á markaði fjölgar því erfiðara verður að fylgja því eftir að öll fyrirtækin bjóði sama háa einokunarverðið.

Aðrir fræðingar hafa velt fyrir sér hvaða áhrif það hefur á langtímasamvinnu ef sumir eða allir aðilar eru óþreyjufullir og hafa aðeins óljós merki úr hegðan keppinauta sinna í fortíðinni til að fara eftir. Meðal þeirra sem þar hafa látið til sín taka eru Green og Porter (1984) og Abreu, Pearce og Stacchetti (1990). Í seinni tíð hafa leikirnir verið endurbættir með því m.a. að gera ráð fyrir að þátttakendur séu langlífir og að eftirlit bæði opinberra aðila og einkaaðila sé gloppótt.³⁷

36. Þetta má skýra betur á eftirfarandi hátt. Látum $\Pi(p)$ vera hagnað allra fyrirtækja þegar öll bjóða sama verð p og gerum ráð fyrir því að hagnaðarfallið sé samfelld og hafi aðeins eitt hágildi í $p = \hat{p}$. Sú röð leikáætlana sem heppilegust er jafngildir undirleikisfullkomnu jafnvægi ef og aðeins ef $\frac{1}{n} \Pi(\hat{p}) / (1 - \delta)$ er aðeins hærra en $\Pi(p)$ fyrir hvaða verð sem er $p < \hat{p}$. Fyrri stærðin er jöfn núvirði hagnaðar fyrirtækisins ef það heldur sig við verðið sem fyrirtækin hafa komið sér saman um, en seinni stærðin er núvirði hagnaðar fyrirtækisins ef það fer á bak við hin fyrirtækin og býður verð sem er lægra. Það fyrirtæki getur náð meiri hagnaði fyrst í stað en hagnaður þess eftir það verður enginn vegna þess að þá munu öll önnur fyrirtæki ákveða verð sem er jafnt jaðarkostnaði. Vegna þess að hagnaðarfallið er samfelld verður jafnvægisskilyrðið $\delta > 1 - \frac{1}{n}$. Fyrirtækin hafa engan hag af því að hætta við að refsa þeim sem svíkst undan merkjum vegna þess að ekkert fyrirtæki er rekið með hagnaði ef þau ákveða öll verð þannig að $p = c$.

37. Sjá t.d. Fudenberg og Levine (1994), Fudenberg, Levine og Maskin (1994), Kandori (2002) og Ely, Hörner og Elszewski (2005).

Mikið hefur einnig verið skrifað um samvinnu í leikjum sem eru endurteknir endanlega oft, svo sem t.d. þegar þrepaleikurinn G er endurtekinn í ákveðinn fjölda skipta. Benoit og Krishna (1985) kynntu til sögunnar niðurstöður sem minna á alþýðukennisetninguna í endurteknum leikjum með mörgum Nash-jafnvægjum þegar um er að ræða langan, en endanlegan tíma. Kreps, Milgrom, Roberts og Wilson (1982) héldu sig við hinn gamalkunna fangavanda. Þeir sýndu að ef sá leikur er endurtekinn nægjanlega oft muni aðeins þurfa að bjaga örlítið þá þekkingu sem þátttakendur hafa um ávinning til að viðhalda samvinnu mestallan tímann sem leikið er, en að undir lok leiksins muni samvinnan þó breyta og erjur brjótast út. Neyman (1999) kannaði hvaða áhrif það hefði á vandamál fanganna ef óvíst væri nákvæmlega hve lengi leikurinn varaði þótt upplýsingar væru fullkomnar að öðru leyti og sýndi fram á að jafnvel við slíkar aðstæður væri samvinna hugsanleg. Ekki má heldur gleyma framlagi Axelrod (1984) til fræðinnar um endurtekna leiki sem sýndi að hin einfalda regla að gjalda líku líkt gæfi ágætis árangur ef skynsemi þátttakenda í leiknum væri takmörkuð.

Allir þeir sem fylgt hafa í fótspor Aumann eiga honum mikið að þakka fyrir óvenjulegt innsæi og frumlegar rannsóknir. Rannsóknir hans og þeirra sem fylgt hafa í kjölfar hans á leikjum sem eru endurteknir hafa víða verið notaðar til að skýra hegðan aðila sem eiga að einhverju leyti ólíkra hagsmuna að gæta. Í fyrstu var þessi tegund leikjafræði einkum notuð til að skýra samkeppni á markaði en í seinni tíð hafa henni verið víðar fundin not og má þar nefna rannsóknir Ostrom (1990) á samvinnu bænda sem eiga sameiginleg beitarlönd eða áveitur.

Kenningarnar um endurtekna leiki má nota til að skýra og skilja ótalmargt í mannlegu samfélagi, svo sem það af hverju það er svo miklu auðveldara að koma við samvinnu þegar margir eiga í hlut, þegar aðilar eiga sjaldan bein samskipti, þegar töluverðar líkur eru á að utanaðkomandi áhrif verði til þess að þessi samskipti detti upp fyrir, þegar samvinnan spannar tiltölulega stutt tímabil, og þegar tími líður þar til að í ljós kemur hvernig aðrir aðilar hafa hegðað sér. Verðstríð, viðskiptaátök og aðrar hagrænar og félagslegar erjur má oft rekja

til einhverra af þeim þáttum sem hér hafa verið tíundaðir. Þessa tegund leikjafræði má einnig nota til að glöggva sig á því hvornig á því stendur að svo margar stofnanir hafa orðið til í samfélaginu og hvers vegna þær hafa haldið velli, líkt og Greif, Milgrom og Wingast (1994) gerðu til að útskýra tilurð verslunargilda fyrir á öldum, Maggi (1999) til að útskýra stofnun Alþjóðaviðskiptastofnunarinnar (WTO) og Dixit (2003) til að útskýra hvornig mafían varð til.

3.2 Aðrar rannsóknir Aumann

Aumann hefur stundað rannsóknir á fleiri sviðum leikjafræðinnar og sýnt hvornig nota megi þær niðurstöður á hagnýtan hátt. Hér verður dregið á nokkrar þeirra.

Ákvörðun þátttakenda í leik um hvað næst skuli gera byggist á víðtækum upplýsingum um hugsanlegar áætlanir andstæðinganna, hvaða þekkingu þeir búi yfir og hvaða augum þeir líti þá valkosti sem bjóðast. Því er eðlilegt að spyrja: Hvaða þekkingarfræðilegu forsendur þurfa að vera til staðar til að hægt sé að ganga að því sem vísu að skynsamir aðilar leiki til jafnvægis? Leikjafræðingar þögðu jafnan þunnu hljóði þegar þessari spurningu var varpað fram og hagfræðingar gerðu ýmsar jafnvægisgreiningar án þess að spurningin þvældist of mikið fyrir þeim. Í grein sinni „Sammála um að vera ósammála“ frá árinu 1976 kynnti Aumann til sögunnar í leikjafræðinni hugtakið almenn vitneskja (e. *common knowledge*) sem Lewis (1969) hafði áður sett fram. Atburður flokkast sem almenn vitneskja meðal þátttakenda í tilteknum leik ef allir aðilar vita um hann, allir vita að allir vita um hann, allir vita að allir vita að allir vita um hann o.s.frv. upp í hið óendanlega. Í stuttu máli má segja að Aumann hafi sannað að ef tveir þátttakendur hefðu almenna vitneskju um mat hvor annars á líkum þess að tiltekinn atburður gerðist hlyti mat þeirra beggja að vera hið sama. Sönnunin byggist á gagnkvæmu innsæi og hafði mikil áhrif á fræðilega greiningu á viðskiptum á fjármálamarkaði.³⁸

Á níunda áratugnum sýndu Bernheim (1984) og Pearce (1984) fram á að skynsemi þátttakenda

í leik og almenn vitneskja þeirra um leikinn og um skynsemi hver annars myndi almennt séð ekki leiða til þess að Nash-jafnvægi kæmist á, ekki einu sinni í leikjum þar sem til staðar væri eitt einstakt Nash-jafnvægi. Áratug seinna negldu Aumann og Brandenburger (1995) niður þau stífu þekkingarfræðilegu skilyrði sem verða að vera fyrir hendi til að Nash-jafnvægi náist í leik.

Svo sem áður hefur verið greint frá skilgreindi Aumann hugtakið sterkt jafnvægi sem þróaða útgáfu af Nash-jafnvægi. Í tveimur greinum sem hann skrifaði á áttunda og níunda áratugnum kynnti hann til sögunnar annað lausnarhugtak sem er hrárra (e. *coarser*) en Nash-jafnvægi og kallaði það fylgið jafnvægi (e. *correlated equilibrium*).³⁹ Ólíkt því sem gildir um Nash-jafnvægi gefa fylgin jafnvægi færi á því að leikáætlanir ólíkra aðila séu tölfræðilega háðar. Fyrir vikið er hægt að líta á Nash-jafnvægi sem það sértilvik þegar leikáætlanir eru tölfræðilega óháðar. Fylgni af þessu tagi getur orðið til ef aðilar miða ákvörðun sína um hvaða áætlun skuli fylgja við einhverjar slembibreytur sem hafa fylgni, svo sem veðurathuganir frá ólíkum en nálægum stöðum, fréttir í blöðum, eða einhverja aðra breytilega stærð í umhverfi þeirra. Að gefnum ákvörðunum annarra muni einstaklingur ætíð velja besta leikinn í fylgnijafnvægi.

Í leik þar sem upplýsingar eru fullkomnar munu þær niðurstöður sem hægt er að fá fram í fylgju jafnvægi takmarka þá samvinnu sem hægt er að gera ráð fyrir að aðilar hafi ef þeir geta átt samskipti, hugsanlega í gegnum einhvern hlutlausan málamiðlara, áður en þeir taka ákvörðun um hvaða áætlun skuli fylgja í leiknum. Ef ráðleggingar hins hlutlausa málamiðlara eru sú slembibreyta sem veldur fylgninni, mun fylgnijafnvægið í raun samanstanda af safni ráðlegginga. Enginn aðili getur þá aukið væntan ávinning sinn með því að snúa baki við þeim ráðleggingum sem gefnar voru. Tökum aftur dæmið af löndunum sem geta valið á milli þess að vígbúast eða ekki og lýst er í töflu 1. Hér er hægt að sýna fram á að til staðar sé fylgið jafnvægi þar sem hvorugt landið kys að hervæðast, en góðar líkur eru aftur á móti á að friðsamleg lausn (*b,b*) náist. Gerum ráð fyrir að

38. Sjá t.d. Milgrom og Stokey (1982).

39. Aumann (1973) og Aumann (1987).

líkurnar á því að málamiðlari leggi til að annað hvort landið haldi aftur af sér og hervæðist ekki séu jafnar π . Þessar líkur eru jafnar óháð því hvoru landinu hann ráðleggur að halda friðinn. Líkurnar á að hann ráðleggi báðum að vígbúast eru þá $1-2\pi$. Ef $\pi > 2b/(2b+a-c)$ mun hvorugt landið hervæðast því að það mun því aðeins hervæðast að því verði ráðlagt að gjöra svo.⁴⁰ Myerson (1991) fjallar á nákvæman hátt um sambandið á milli fylgins jafnvægis og samskipta í leikjum.

Í grein sinni frá árinu 1987 fjallaði Aumann um hvernig líta mætti á fylgið jafnvægi sem eðlilegt framhald á því að beita Bayesískri ákvarðanafræði við samkeppnisleiki. Skynsamir þátttakendur í leik í skilningi Savage (1954) munu þá knýja fram fylgið jafnvægi ef bæði skynsemi þeirra og líkurnar fyrirfram eru hluti af þeirra almennu vitneskju sem er til staðar.

Aumann hefur einnig verið fyrirferðarmikill á fleiri sviðum hagfræðinnar. Ásamt Frank J. Anscombe hefur hann skrifað nokkuð um ákvarðanafræði,⁴¹ hann hefur sjálfur þróað samfellulíkön fyrir fullkomna samkeppnismarkaði⁴² og ásamt Mordecai Kurz og Abraham Neyman hefur hann sýnt hvernig nota má leikjafræði í pólitískri hagfræði.⁴³

4. Frekari lesning

Skrif Thomas Schelling eru öllum aðgengileg, jafnt innvígðum sem ólærðum, og hægt er að mæla með fyrstu bókum og greinum hans. Aumann er aftur á móti afar tæknilegur, en inn á milli er þó að finna læsilegar útskýringar. Aumann (1981) hefur að geyma afbragðsgott yfirlit yfir þróun fræði endurtekinna leikja fram að þeim tíma og Aumann og Maschler (1995) er góð samantekt á fyrstu skrifum um endurtekna leiki með ófullkomnum upplýsingum. Dixit og Nalebuff (1991) er lítt tæknilegt og auðlæsilegt rit um leikjafræði. Í kafla 4 er fjallað um langtímasamvinnu og í kafla 6 um trúverðuga staðfestu. Dixit og Skeath (2004) er heppileg bók fyrir byrjendur í leikjafræði, en Fudenberg og Tirole (1991) og Myerson (1991) eru tæknileg og fremur tyrfin rit. Persónulega sýn Nóbelsverðlaunahafanna á leikjafræði má finna í Aumann (1985) og Schelling (1967) en óvíst er hvort þær bækur endurspeglir réttilega viðhorf þeirra í dag til fræðasviðsins. Nánari upplýsingar um feril þeirra og lífsviðhorf má finna í bók Zeckhauser (1989) um Schelling og viðtal sem Hart (2005) átti við Aumann.

40. Ef landinu er ekki ráðlagt að vígbúast mun það vita að hinu landinu hafi verið ráðlagt að halda að sér höndum og þá er best fyrir þetta land að blása í herlúðrana. Væntur ávinningur ef málamiðlarinn ráðleggur landinu að halda friðinn verður aftur á móti $\pi c + (1-2\pi)/b$ og það er meiri ávinningur en hafa má af vígbúnaði þar sem hann er jafn πa .

41. Anscombe og Aumann (1963).

42. Aumann (1964 og 1966).

43. Aumann og Kurz (1977), Aumann, Kurz og Neyman (1983 og 1987).

Heimildir

- Abreu, D. 1988. On the theory of infinitely repeated games with discounting, *Econometrica*, 56, 383-396.
- Abreu, D., D. Pearce og E. Stacchetti. 1990. Towards a theory of discounted repeated games with imperfect monitoring, *Econometrica*, 58, 1041-1063.
- Abreu, D., P. Dutta og L. Smith. 1994. The Folk Theorem for repeated games: A NEU condition, *Econometrica*, 62, 939-948.
- Admati, A.R., og M. Perry. 1991. Joint projects without commitment, *Review of Economic Studies*, 58, 259-276.
- Anscombe, F.J., og R.J. Aumann. 1963. A definition of subjective probability, *Annals of Mathematical Statistics*, 34, 199-205.
- Aumann, R.J. 1959. Acceptable points in general cooperative n-person games. Í R.D. Luce og A.W. Tucker (ritstj.). *Contributions to the Theory of Games IV*, Annals of Mathematics Study, 40, 287-324. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- Aumann, R.J. 1964. Markets with a continuum of traders, *Econometrica*, 32, 39-50.
- Aumann, R.J. 1966. Existence of competitive equilibria in markets with a continuum of traders, *Econometrica*, 34, 3-27.
- Aumann, R.J. 1974. Subjectivity and correlation in randomized strategies, *Journal of Mathematical Economics*, 1, 67-96.
- Aumann R.J. 1976. Agreeing to disagree, *The Annals of Statistics*, 4, 1236-1239.
- Aumann, R.J. 1981. Survey of repeated games. Í *Essays in Game Theory and Mathematical Economics in Honor of Oskar Morgenstern*, 11-42. Mannheim, Wissenschaftsverlag.
- Aumann, R.J. 1985. What is game theory trying to accomplish? Í K. Arrow og S. Honkapohja (ritstj.). *Frontiers of Economics*. Oxford: Basil Blackwell.
- Aumann, R.J. 1987. Correlated equilibrium as an extension of Bayesian rationality, *Econometrica*, 55, 1-18.
- Aumann, R.J., og A. Brandenburger. 1995. Epistemic conditions for Nash equilibrium, *Econometrica*, 64, 1161-1180.
- Aumann, R.J., og M. Kurz. 1977. Power and taxes, *Econometrica*, 45, 1137-1161.
- Aumann, R.J., M. Kurz og A. Neyman. 1983. Voting for public goods, *Review of Economic Studies*, 677-694.
- Aumann, R.J., M. Kurz og A. Neyman. 1987. Power and public goods, *Journal of Economic Theory*, 42, 108-127.
- Aumann, R.J., og M. Maschler. 1966. *Game theoretic aspects of gradual disarmament*. Report ST-80, Mathematica Inc., Princeton, NJ.
- Aumann, R.J., og M. Maschler. 1967. *Repeated games with incomplete information: A survey of recent results*. Report ST-116, Mathematica Inc., Princeton, NJ.
- Aumann, R.J., og M. Maschler. 1968. *Repeated games of incomplete information, the zero-sum extensive case*. Report ST-143, Mathematica Inc., Princeton, NJ.
- Aumann, R.J., og M. Maschler (í samvinnu við R. Stearns) 1995. *Repeated Games with Incomplete Information*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.
- Aumann, R.J., M. Maschler og R. Stearns. 1968. Repeated games of incomplete information: an approach to the non-zero sum case. Í *Report of the U.S. Arms Control and Disarmament Agency*, ST-143, Chapter IV, 117-216.
- Aumann, R.J., og L. Shapley. 1974. *Value of Non-Atomic Games*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- Aumann, R.J., og L. Shapley. 1976. *Long-term competition: A game-theoretic analysis*, fjölrít. Hebrew University. (Endurútgæfið í N. Megiddo, (ritstj.)) 1994. *Essays in Game Theory in Honor of Michael Maschler*, 1-15. Berlin: Springer Verlag.
- Aumann, R.J., og S. Sorin. 1989. Cooperation and bounded recall, *Games and Economic Behavior*, 1, 5-39.
- Axelrod, R. 1984. *The Evolution of Cooperation*. New York: Basic Books.
- Baliga, S., og T. Sjöström. 2004. Arms races and negotiations, *Review of Economic Studies*, 71, 351-369.
- Benoît, J.-P., og V. Krishna. 1985. Finitely repeated games, *Econometrica*, 53, 890-904.
- Bernheim, B.D. 1984. Rationalizable strategic behavior, *Econometrica*, 52, 1007-1028.
- Binmore, K., og L. Samuelson. 2004. The evolution of focal points, *Games and Economic Behavior*, væntanleg.
- Camerer, C. 2003. *Behavioral Game Theory*, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Crawford, V. 1982. A theory of disagreement in bargaining, *Econometrica*, 50, 607-637.
- Dixit, A. 1980. The role of investment in entry deterrence, *Economic Journal*, 90, 95-106.
- Dixit, A. 2003. On modes of economic governance, *Econometrica*, 71, 449-481.

- Dixit, A., og B. Nalebuff. 1991. *Thinking Strategically: The Competitive Edge in Business, Politics, and Everyday Life*. New York: W.W. Norton.
- Dixit, A., og S. Skeath. 2004. *Games of Strategy*, 2. útgáfa. New York: W.W. Norton.
- Ely, J., J. Hörner og W. Olszewski. 2005. Belief-free equilibria in repeated games, *Econometrica*, 73, 377-415.
- Friedman, J. 1971. A non-cooperative equilibrium for supergames, *Review of Economic Studies*, 38, 1-12.
- Fudenberg, D., og D. Levine. 1994. Efficiency and observability with long-run and short-run players, *Journal of Economic Theory*, 62, 103-135.
- Fudenberg, D., D. Levine og E. Maskin. 1994. The Folk theorem with imperfect public information, *Econometrica*, 62, 997-1039.
- Fudenberg, D., og E. Maskin. 1986. The Folk theorem for repeated games with discounting and with incomplete information, *Econometrica*, 54, 533-554.
- Fudenberg, D., og J. Tirole. 1991. *Game Theory*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.
- Gale, D. 2001. Monotone games with positive spillovers, *Games and Economic Behavior*, 37, 295-320.
- Green, E., og R. Porter. 1984. Noncooperative collusion under imperfect price information, *Econometrica*, 52, 87-100.
- Greif, A., P. Milgrom og B.R. Weingast. 1994. Coordination, commitment, and enforcement, *Journal of Political Economy*, 102, 745-776.
- Güth, W., K. Ritzberger og E. van Damme. 2004. On the Nash bargaining solution with noise, *European Economic Review*, 48, 697-713.
- Hart, S. 2005. An interview with Robert Aumann, *Macroeconomic Dynamics*, væntanleg.
- Hobbes, T. 1651. *The Leviathan*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Kandori, M. 2002. Introduction to repeated games with imperfect monitoring, *Journal of Economic Theory*, 102, 1-15.
- Kreps, D., P. Milgrom, J. Roberts og R. Wilson. 1982. Rational cooperation in the finitely repeated prisoners' dilemma, *Journal of Economic Theory*, 27, 245-252.
- Lewis, D. 1969. *Convention*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
- Lockwood, B., og J.P. Thomas. 2002. Gradualism and irreversibility, *Review of Economic Studies*, 69, 339-356.
- Luce, D., og H. Raiffa. 1957. *Decisions and Games*. New York: Wiley.
- Maggi, G. 1999. The role of multinational institutions in international trade cooperation, *American Economic Review*, 89, 190-214.
- Marx, L.M., og S.A. Matthews. 2000. Dynamic voluntary contribution to a public project, *Review of Economic Studies*, 67, 327-358.
- Maynard Smith, J. 1982. *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Mehta, J., C. Starmer og R. Sugden. 1994a. The nature of salience: An experimental investigation of pure coordination games, *American Economic Review*, 84, 658-673.
- Mehta, J., C. Starmer og R. Sugden. 1994b. Focal points in pure coordination games: An experimental investigation, *Theory and Decision*, 36, 163-185.
- Milgrom, P., og N. Stokey. 1982. Information, trade and common knowledge, *Journal of Economic Theory*, 26, 17-27.
- Muthoo, A. 1996. A bargaining model based on the commitment tactic, *Journal of Economic Theory*, 69, 134-152.
- Myerson, R.B. 1991. *Game Theory: Analysis of Conflict*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
- Nash, J. 1950a. Equilibrium points in n-person games, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36, 48-49.
- Nash, J. 1950b. The bargaining problem, *Econometrica*, 18, 155-162.
- Nash, J. 1951. Non-cooperative games, *Annals of Mathematics*, 54, 286-295.
- Nash, J. 1953. Two-person cooperative games, *Econometrica*, 21, 128-140.
- Neyman, A. 1999. Cooperation in repeated games when the number of stages is not commonly known, *Econometrica*, 67, 45-64.
- Ostrom, E., 1990. *Governing the Commons: The Evolution of Institutions for Collective Action*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Pearce, D.G. 1984. Rationalizable strategic behavior and the problem of perfection, *Econometrica*, 52, 1029-1050.
- Phelps, E. og R. Pollak. 1968. On second-best national savings and game-theoretic growth, *Review of Economic Studies*, 35, 201-208.
- Reiter, D. 1995. Exploding the power keg myth: Preemptive wars almost never happen, *International Security*, 20, 5-34.
- Rogoff, K. 1985. The optimal degree of commitment to an intermediate monetary target, *Quarterly Journal of Economics*, 100, 1169-1189.
- Rubinstein, A. 1976. Equilibrium in supergames, Center

- for Mathematical Economics and Game Theory, Hebrew University. (Fyrsti hluti var endurútgefinn í N. Megiddo (ritstj.), (1994). *Essays in Game Theory in Honor of Michael Maschler*, 17-28. Berlin, Springer Verlag.
- Rubinstein, A. 1979. Equilibrium in supergames with the overtaking criterion, *Journal of Economic Theory*, 21, 1-9.
- Savage, L. 1954. *The Foundations of Statistics*. Nineola, New York: Dover.
- Schelling, T.C. 1956. An essay on bargaining, *American Economic Review*, 46, 281-306.
- Schelling, T.C. 1960. *The Strategy of Conflict*, Harvard University Press, Cambridge MA.
- Schelling, T.C. 1966. *Arms and Influence*. New Haven: Yale University Press.
- Schelling, T.C. 1967. What is game theory? Í J.C. Charlesworth (ritstj.), *Contemporary Political Analysis*, Free Press, New York. (Endurútgæfið sem 10. kafli í Schelling. 1984.)
- Schelling, T.C. 1971. Dynamic models of segregation, *Journal of Mathematical Sociology*, 1, 143-186.
- Schelling, T.C. 1978. *Micromotives and Macrobehavior*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
- Schelling, T.C. 1980. The intimate contest for self-command, *The Public Interest*, 60, 94-118.
- Schelling, T.C. 1983. Ethics, law, and the exercise of self-command. Í S.M. McMurrin (ritstj.), *The Tanner Lectures on Human Values IV*, 43-79. Salt Lake City: University of Utah Press.
- Schelling, T.C. 1984a. Self-command in practice, in policy, and in a theory of rational choice, *American Economic Review, Papers and Proceedings*, 74, 1-11.
- Schelling, T.C. 1984b. *Choice and Consequence*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
- Schelling, T.C. 1992. Addictive drugs: The cigarette experience, *Science*, 255, 430-434.
- Schelling, T.C., og M.H. Halperin. 1961. *Strategy and Arms Control*. New York: Twentieth Century Fund.
- Selten, R. 1965. Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragerträgeit - Teil I: Bestimmung des dynamischen Preisgleichgewichts, *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft*, 121, 301-324.
- Selten, R. 1975. Re-examination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games, *International Journal of Game Theory*, 4, 25-55.
- Snyder, G.H., og P. Diesing. 1977. *Conflict among Nations: Bargaining, Decision Making, and System Structure in International Crises*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- Spence, M. 1977. Entry, investment, and oligopolistic pricing, *Bell Journal of Economics*, 8, 534-544.
- Stearns, R. 1967. *A formal information concept for games with incomplete information*. Report of the U.S. Arms Control and Disarmament Agency ST-116, Chapter IV, 405-430.
- Strotz, R. 1956. Myopia and inconsistency in dynamic utility maximization, *Review of Economic Studies*, 23, 165-180.
- von Neumann, J., og O. Morgenstern. 1944. *The Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- Wohlstetter, A. 1959. The delicate balance of terror, *Foreign Affairs*, 37, 211-234.
- Zeckhauser, R. 1989. Distinguished fellow: Reflections on Thomas Schelling, *Journal of Economic Perspectives*, 3, 153-164.