Hönnun íslenska vaxtarófsins

Sverrir Ólafsson, BT, RISKCON og HR
Arnar Jónsson, Landsbanka Íslands

Yfirlit

- Sérstaða vaxta
- Mismunandi tegundir vaxtarófa
- Markaðsgögn til að smíða vaxtaróf
- Aðferðir til að smíða vaxtaróf
- Vandamál íslenska vaxtamarkaðarins

Sérstaða vaxta

- Á hverju augnabliki er verð verðbréfa, skuldabréfa og afurða einkennt með einni stærð
  - Verðið er gefið upp af markaðnum
- Á hverju augnabliki eru vextir einkenndir með heilu ferli – vaxtarófinu
  - Ferlið er ekki gefið upp af markaðnum – þarf að smíðast út frá verði mismunandi verkfæra
- Allt vaxtarófið þarf, á öllum tímum, að samræmast verði mismunandi vaxtaverkfæra

Tegundir vaxta

- Tímabundnir vextir – afvöxtunarþáttur

  $D(t,T) = \exp\left(-(T-t)\,R(t,T)\right) \;;\; R(t,T)$ stundarvextir

- Framvirkir vextir

$$F\left(t,T_i,T_j\right) = \frac{1}{T_j - T_i}\log\left(\frac{D(t,T_i)}{D\left(t,T_j\right)}\right) \;;\; t \le T_i < T_j$$

- Framvirkir augnabliksvextir

$$\lim_{T_j \to T_i = T} F\left(t,T_i,T_j\right) = f(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T}\log D(t,T)$$

Grundvallartengsl vaxta

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
 & R(t,T) \arrow[dl, shift right, "D(t,T) = \exp\left(-(T-t)\,R(t,T)\right)"'] \arrow[dr, shift left, "f(t,T) = R(t,T) + (T-t)\frac{\partial R(t,T)}{\partial T}"] & \\
D(t,T) \arrow[ur, shift right, "R(t,T) = \frac{-1}{T-t}\log D(t,T)"'] \arrow[rr, shift left, "f(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T}\log D(t,T)"] & & f(t,T) \arrow[ul, shift left, "R(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T f(t,\tau)\,d\tau"'] \arrow[ll, shift left, "D(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,\tau)\,d\tau\right)"]
\end{tikzcd}$$

Aðferðir

- Skýrandi
  - Líkön fyrir vaxtaþróun kvörðuð út frá markaðsgögnum

$$dr(t) = \mu(r,t)\,dt + \sigma(r,t)\,dW \;\Rightarrow\; G(t) = E_t\left[\exp\left(-\int_t^T r(\tau)\,d\tau\right)G(T)\right]$$

  - Sértilfelli

$$P(t,T) = E_t\left[\exp\left(-\int_t^T r(\tau)\,d\tau\right)\right]$$

- Lýsandi
  - Engar tilgátur gerðar um tímaþróun vaxta
  - Nota markaðsverð vaxtaverkfæra til að setja saman vaxtarófið

$P = CD$; P verð ; C fjárstreymi

  - Finn D með bestunaraðferðum

Verkfæri til að smíða vaxtarófið

- Verkfæri á peningamarkaði
  - LIBOR
  - Eurodollar
  - Skiptavextir
- Verkfæri á fjármagnsmarkaði
  - Affallabréf
  - Arðgreiðslubréf
- Íslenski markaðurinn býður ekki upp á mikla fjölbreytni

LIBOR

- LIBOR – borga eina einingu á tíma t

$$\begin{array}{cccc} T_1 & T_2 & & T_N \\ 1+\alpha_1 L(t,T_1) & 1+\alpha_2 L(t,T_2) & & 1+\alpha_N L(t,T_N) \end{array} \quad ; \quad \alpha_i = T_i - t$$

- Fylkisjafna

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha_1 L(t,T_1) & 0 & 0 \\ 0 & 1+\alpha_2 L(t,T_2) & \\ & & \\ 0 & & 1+\alpha_N L(t,T_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D(t,T_1) \\ D(t,T_2) \\ \\ D(t,T_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

Framvirkir vextir

- Framvirkir vextir

$$F(t,T_k,T_{k+1}) = \frac{1}{\alpha_k}\left(\frac{D(t,T_k) - D(t,T_{k+1})}{D(t,T_{k+1})}\right) \; ; \; \alpha_k = T_{k+1} - T_k$$

- Fylkisjafna

$$\begin{pmatrix} -1 & 1+\alpha_1 F(t,T_1,T_2) & & & \\ 0 & -1 & 1+\alpha_2 F(t,T_2,T_3) & & \\ 0 & & & & \\ & & & & \\ & & & -1 & 1+\alpha_{N-1} F(t,T_{N-1},T_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D(t,T_1) \\ D(t,T_2) \\ \\ \\ D(t,T_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

Skiptavextir

- Skiptavextir

$$S\left(t,T_i,T_j\right)=\frac{D\left(t,T_i\right)-D\left(t,T_j\right)}{\sum_{k=i+1}^{j}\alpha_k D\left(t,T_k\right)} \quad \Rightarrow \quad S\left(t,T_j\right)=\frac{1-D\left(t,T_j\right)}{\sum_{k=1}^{j}\alpha_k D\left(t,T_k\right)}$$

- Fylkisjafna

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha_1 S(t,T_1) & 0 & 0 & & \\ \alpha_1 S(t,T_2) & (1+\alpha_2 S(t,T_2)) & 0 & & \\ \alpha_1 S(t,T_3) & \alpha_2 S(t,T_3) & (1+\alpha_3 S(t,T_3)) & 0 & \\ . & . & . & & 0 \\ \alpha_1 S(t,T_N) & \alpha_2 S(t,T_N) & \alpha_3 S(t,T_N) & . & (1+\alpha_N S(t,T_N)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D(t,T_1) \\ D(t,T_2) \\ \\ \\ D(t,T_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

Skuldabréf

- Affallabréf (ein jafna ein óþekkt)

$$D(t,T) = \exp\left(-(T-t)R(t,T)\right) \Rightarrow R(t,T) = \frac{-1}{T-t}\log D(t,T)$$

- Vaxtagreiðslu bréf (ein jafna margar óþekktar)

$$P(t) = \sum_{i=1}^{N} D(t,T_i)C_i + D(t,T_N)Q \Rightarrow D(t,T_N) = \frac{P(t) - \sum_{i=1}^{N-1} D(t,T_i)C_i}{C_N + Q}$$

Skuldabréf

- Fyrir mörg (N) skuldabréf – fylkisjafna

$$P_i(t) = \sum_{j=1}^{B_i} C_{i,j} D\left(t, T_{i,j}\right) \Rightarrow P = CD$$

- Raðir í greiðslufylki C jafnar fjölda bréfanna
- Dálkar í greiðslufylki jafnir fjölda vaxta og höfuðstól greiðslna allra bréfanna:

$$\sum_{i=1}^{N} B_i = B_N$$

- Venjulega er

$$B_N >> N$$

- Því er jafnan $P = CD$ vanákvörðuð!

Lausnarmöguleikar

- Öll bréf eru affallabréf með stigvaxandi líftíma

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \\ P_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1,1} & 0 & & 0 \\ 0 & C_{2,2} & & \\ & & & \\ 0 & & & C_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \\ D_N \end{pmatrix} \Rightarrow D_i = P_i \,/\, C_{i,i}$$

- Reglulegar vaxtagreiðslur – stigvaxandi líftími

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \\ P_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1,1} & 0 & & 0 \\ C_{2,1} & C_{2,2} & & \\ & & & \\ C_{N,1} & & & C_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \\ D_N \end{pmatrix} \Rightarrow D_k = \frac{P_k - \sum_{i=1}^{k-1} C_{k,i} D_i}{C_{k,k}}$$

Almennara tilfelli - dæmi

- Fjárstreymisfylki

	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5
*Bréf*1	$C_{1,1}$										
*Bréf*2		$C_{2,1}$		$C_{2,2}$		$C_{2,3}$					
*Bréf*3		$C_{3,1}$		$C_{3,2}$		$C_{3,3}$		$C_{3,4}$			
*Bréf*4	$C_{4,1}$		$C_{4,2}$		$C_{4,3}$		$C_{4,4}$		$C_{4,5}$		$C_{4,6}$

- Verðjöfnur (fjórar jöfnur – 10 óþekktar stærðir)

$$P_1 = C_{1,1}D(0.5)$$

$$P_2 = C_{2,1}D(1) + C_{2,2}D(2) + C_{2,3}D(3)$$

$$P_3 = C_{3,1}D(1) + C_{3,2}D(2) + C_{3,3}D(3) + C_{3,4}D(4)$$

$$P_4 = C_{4,1}D(0.5) + C_{4,2}D(1.5) + C_{4,3}D(2.5) + C_{4,4}D(3.5) + C_{4,5}D(4.5) + C_{4,6}D(5.5)$$

Almennara tilfelli – dæmi (frh.)

- Liðun í afvöxtunarþáttum fyrir lokatíma

$$
\begin{aligned}
D(1) &= \alpha_1 D(0.5) + \beta_1 D(3) \\
D(2) &= \alpha_2 D(0.5) + \beta_2 D(3) \\
D(1.5) &= \alpha_3 D(0.5) + \beta_3 D(3) \\
D(2.6) &= \alpha_4 D(0.5) + \beta_4 D(3) \\
D(3.5) &= \alpha_5 D(3) + \beta_5 D(4) \\
D(4.5) &= \alpha_6 D(4) + \beta_6 D(5.5)
\end{aligned}
$$

- Fjárstreymisfylki

$$
C = \begin{pmatrix}
C_{1,1} & & & \\
\left(\alpha_1 C_{2,1} + \alpha_2 C_{2,2}\right) & \left(\beta_1 C_{2,1} + \beta_2 C_{2,2} + C_{2,3}\right) & & \\
\left(\alpha_1 C_{3,1} + \alpha_2 C_{3,2}\right) & \left(\beta_1 C_{3,1} + \beta_2 C_{3,2} + C_{3,3}\right) & C_{3,4} & \\
\left(C_{4,1} + \alpha_3 C_{4,2} + \alpha_4 C_{4,3}\right) & \left(\beta_3 C_{4,2} + \beta_4 C_{4,3} + \alpha_5 C_{4,4}\right) & \left(\beta_5 C_{4,4} + \alpha_6 C_{4,5}\right) & \left(\beta_6 C_{4,5} + C_{4,6}\right)
\end{pmatrix}
$$

Lausnarmöguleikar

- Vegna tengslanna

$$D\left(t,T_{i,j}\right)=\exp\left(-\left(T_{i,j}-t\right)R\left(t,T_{i,j}\right)\right)$$

$$D\left(t,T_{i,j}\right)=\exp\left(-\int_{t}^{T_{i,j}} f\left(t,\tau\right)d\tau\right)$$

er hægt að stika (parameterize) verðið með afvöxtunarþætti, stundarvöxtum eða framvirkum vöxtum

- Oft notast við liðun í þekktum lausnum eða í völdum grunnföllum

$$R\left(t,T\right)=\sum_{k}\alpha_k R\left(t,T_k\right) \qquad \phi\left(t,T\right)=\sum_{k}\alpha_k \Psi_k\left(t,T\right)$$

$$D\left(t,T\right)=\sum_{k}\alpha_k D\left(t,T_k\right) \qquad \phi=\{R,D,F\}$$

Splæsiaðlögun

- Mismunandi margliður fyrir mismunandi tímabil vaxtarófsins

$$Q(x) = q_i(x) \; ; \; x_i \leq x < x_{i+1} \; ; \; i = 1, 2, \ldots, N$$

$$q_i(x) = \alpha_i (x - x_i)^3 + \beta_i (x - x_i)^2 + \gamma_i (x - x_i) + \delta_i$$

- Stuðlarnir α_i, β_i, γ_i, δ_i, $i=1,\ldots,N$ ákvarðast með því að gera ráð fyrir jaðarskilyrðum
- Rétt val leiðir til jafn margra jafna og óþekktra stuðla

Splæsiaðlögun

- Eðlilegt hnútaval er hlutmengi allra greiðsludagsetninga
- Með því að nota allar greiðsludagsetningar sem hnúta er hægt að verðleggja verðbréfin nákvæmlega
- Splæsiföll hafa tilhneigingu til að leiða til sveiflukennds framvirks vaxtarófs, sérstaklega ef hnútarnir eru margir
- Erfitt er að túlka sveiflukennt vaxtaróf, sérstaklega í langa endanum

Splæsiaðlögun

- Eftir að búið er að ákveða fjölda og staðsetningu hnúta er vaxtarófið (afvöxtunarþættir, tímabundnir vextir eða framvirkir vextir) tekið sem splæsivarp sem lágmarkar stærðina

$$\Omega(t,\phi) = \sum_{j=1}^{N} (P_i(t) - \Pi_i(t,\phi))^2 \;\; ; \;\; \phi \equiv \{D,R,f\}$$

Þjálguð splæsiföll

- Notkun splæsifalla leiðir oft til sveiflukennnds vaxtarófs – sérstaklega fyrir framvirka vaxtarófið
- Fisher-Nychka-Zervos líkanið lágmarkar eftirfarandi

$$\Omega(t,\phi) = \sum_k \left(P_k(t) - \Pi_k(t,\phi)\right)^2 \quad ; \quad \phi \equiv \{D, R, f\}$$

$$\hat{\Omega}(t,\phi) = \Omega(t,\phi) + \lambda \int_{t_0}^{t} Q''(\tau)d\tau$$

Þjálguð splæsiföll

- Hægt er að umrita tegur þáttinn

$$\lambda\int_{t_0}^{t}\left(Q''(\tau)\right)^2 d\tau = \lambda\beta^{\mathbf{T}}\left(\int_{t_0}^{t}\phi''(\tau)^{\mathbf{T}}\,\phi''(\tau)\,d\tau\right)\beta = \lambda\beta^{\mathbf{T}}H\beta$$

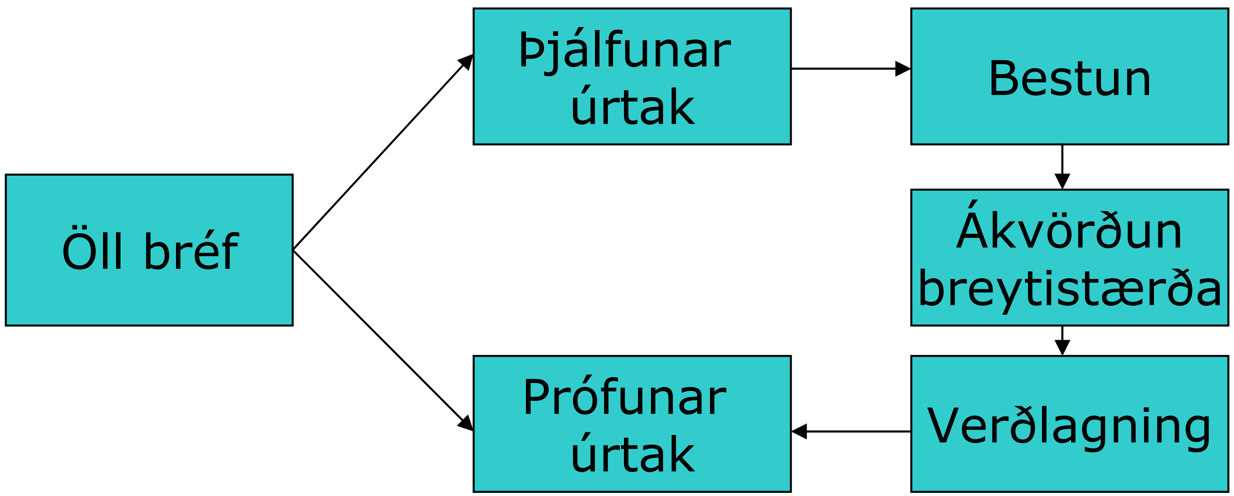
- H is fylki sem ákvarðast fullkomlega af hnútum
- Nú vantar lausn á

$$\Omega^* = \min_{\beta(\lambda)}\left\{\left(P-\Pi\left(\phi(\beta,\lambda)\right)\right)^{\mathbf{T}}\left(P-\Pi\left(\phi(\beta,\lambda)\right)\right)+\lambda\beta(\lambda)^{\mathbf{T}}H\beta\lambda\right\}$$

- Lausn finnst með ítrekun

Verðlagning skuldabréfa

- Aðferðafræði

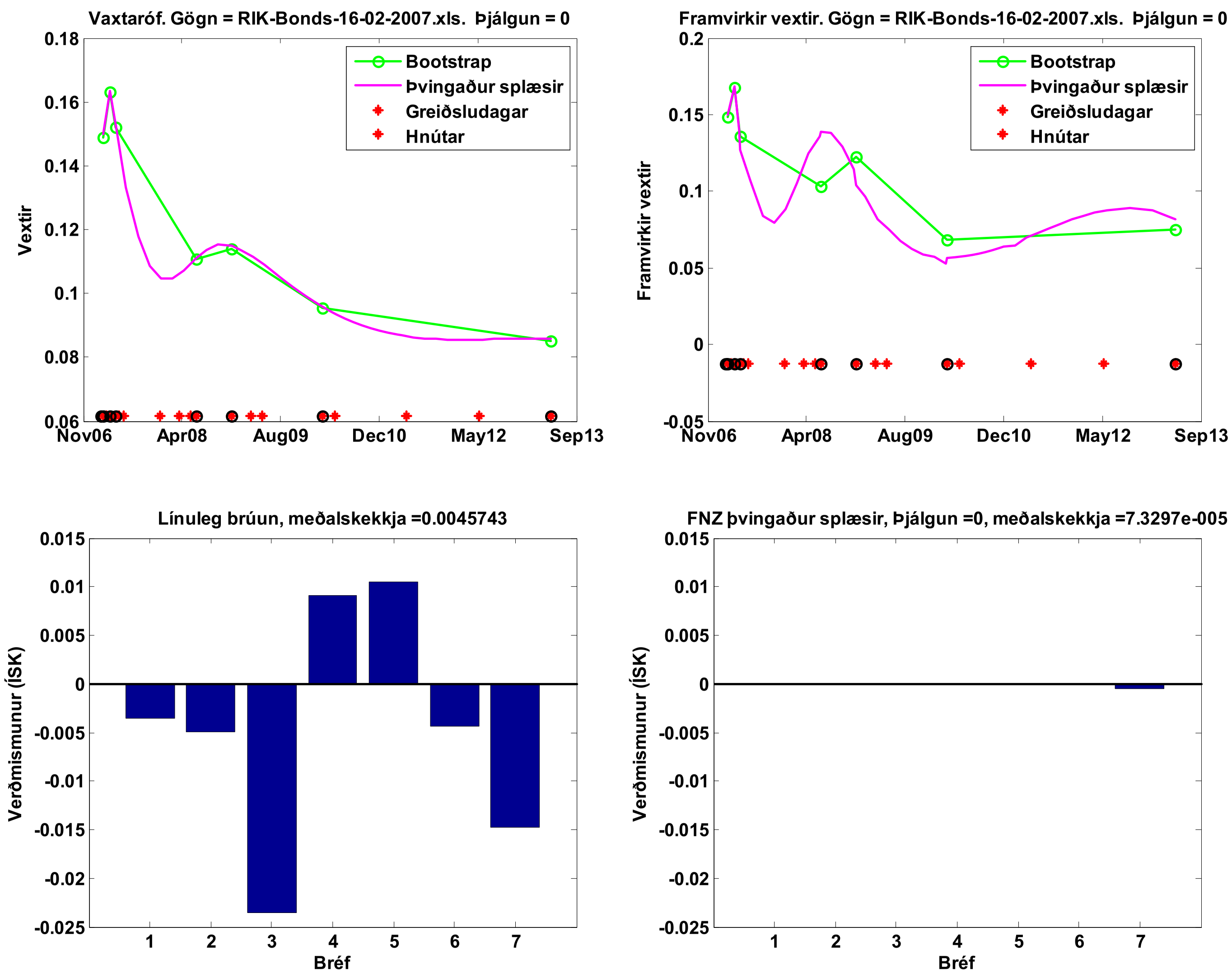


- Ekki mögulegt á íslenska markaðnum vegna lítils fjölda bréfa

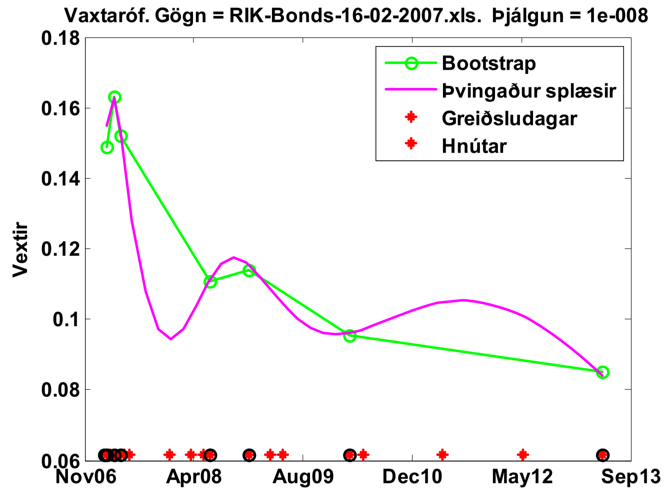
Íslensk skuldabréf sem eru notuð

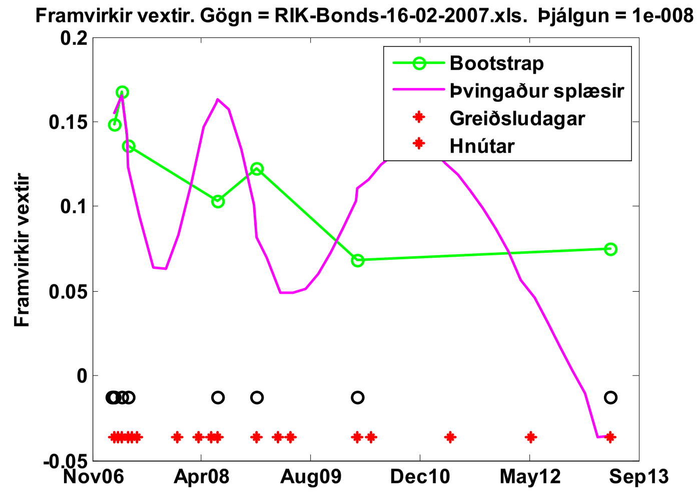
Maturity	CouponRates	Face	Period	Basis	EndMonthRule	Prices	Issue	Name
01/03/2007	**0**	**100**	**1**	**1**	**0**	**99.565**		RIKV07 0301
02/04/2007	0	100	**1**	1	0	98.165	09/02/2001	RIKV07 0402
02/05/2007	0	100	**1**	1	0	97.09		RIKV07 0502
13/06/2008	0.095	100	**1**	0	0	97.58	13/06/2006	RIKB 08 0613
12/12/2008	0.085	100	**1**	0	0	94.825		RIKB08 1212
17/03/2010	0.07	100	**1**	0	0	92.535	17/03/2004	RIKB 10 0317
17/05/2013	0.0725	100	**1**	0	0	92.2	17/05/2002	RIKB 13 0517

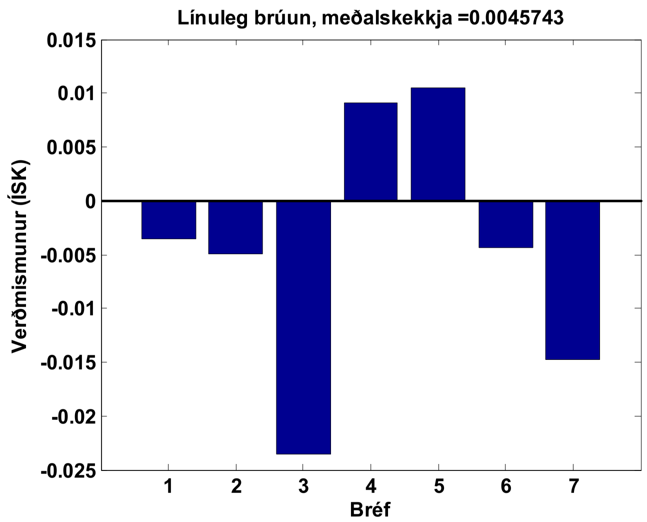
Þjálgun og verðskekkja

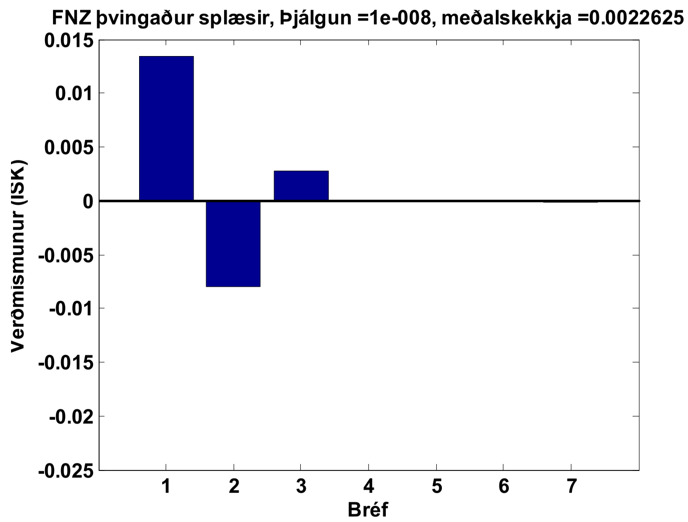


Þjálgun og verðskekkja

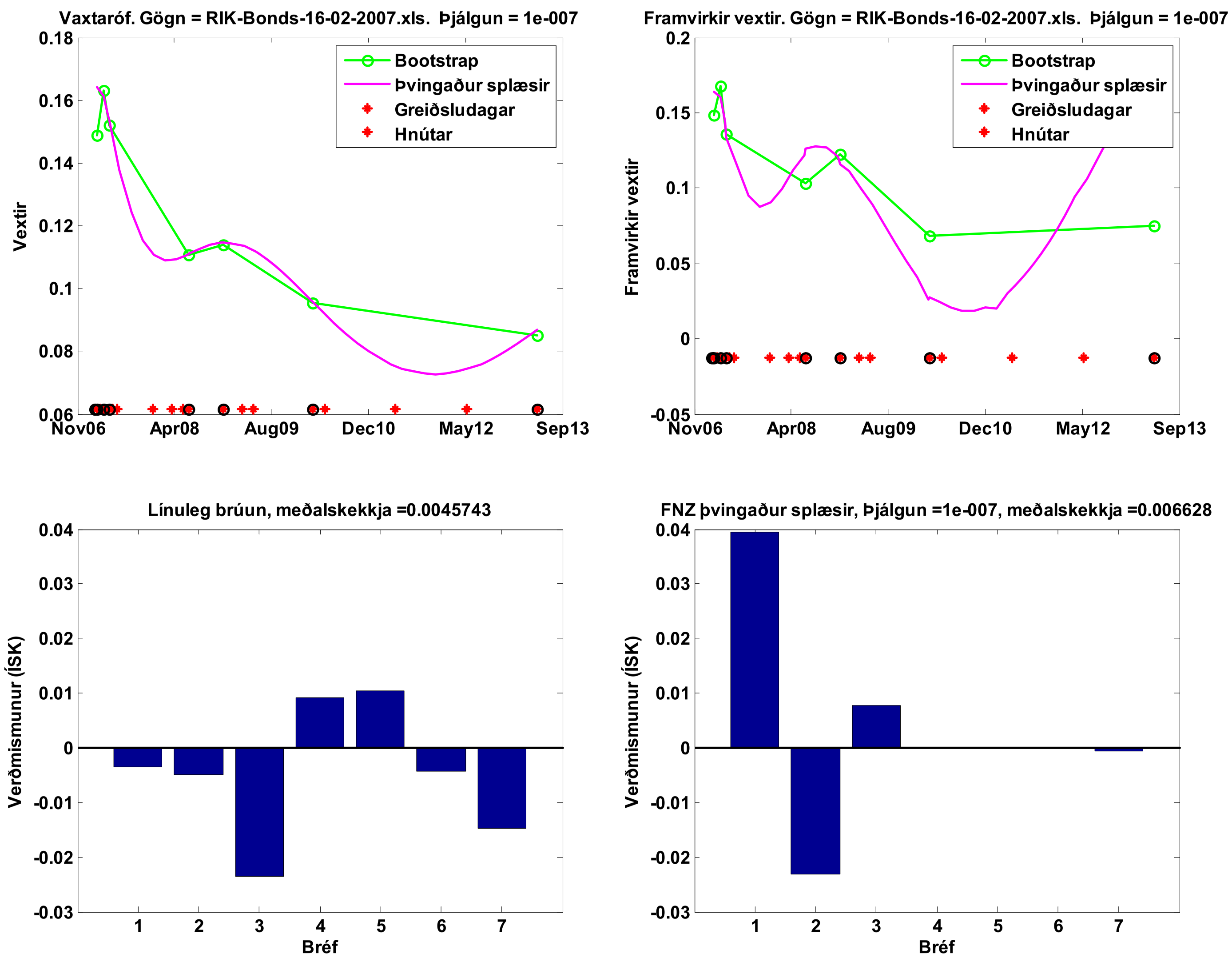




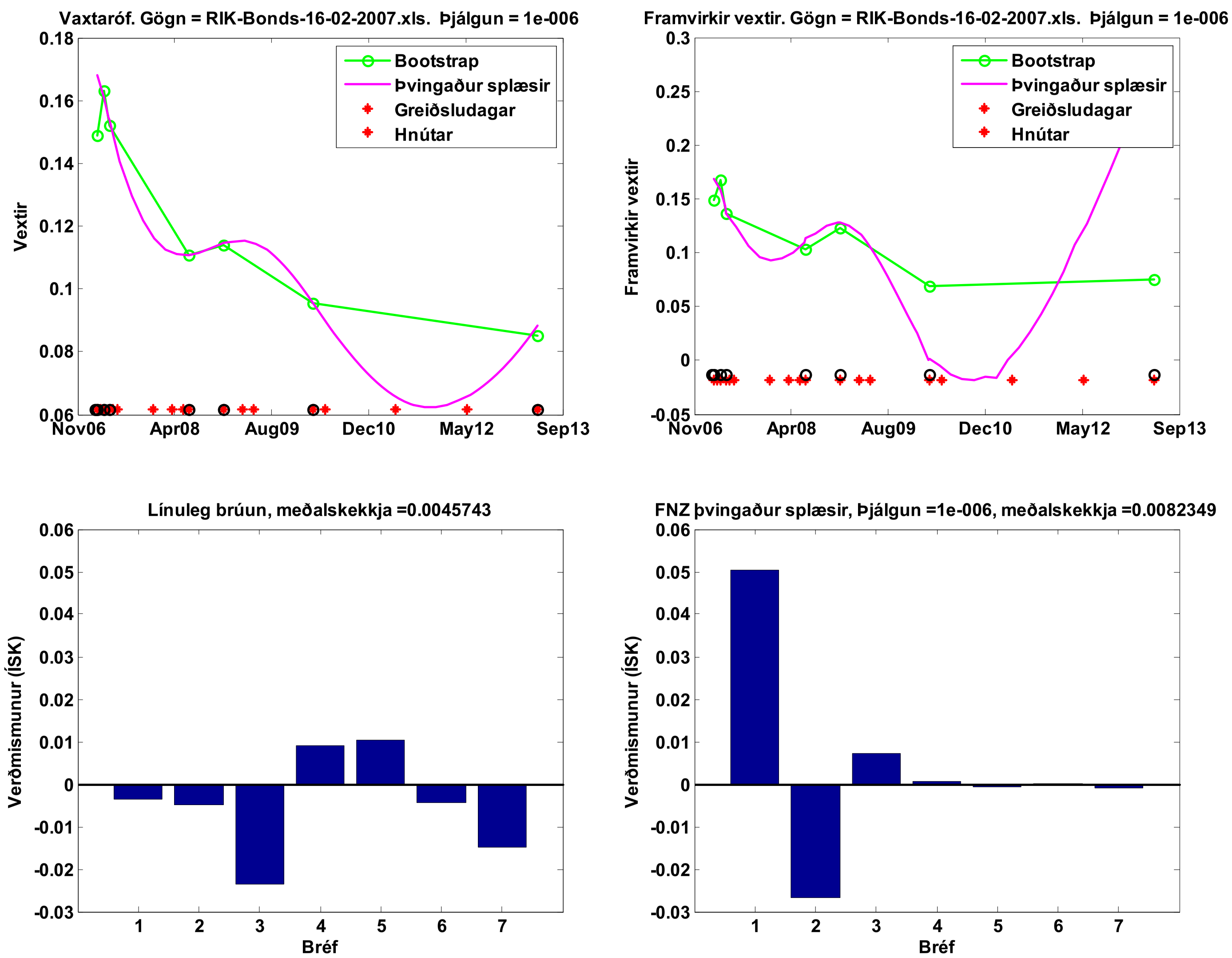




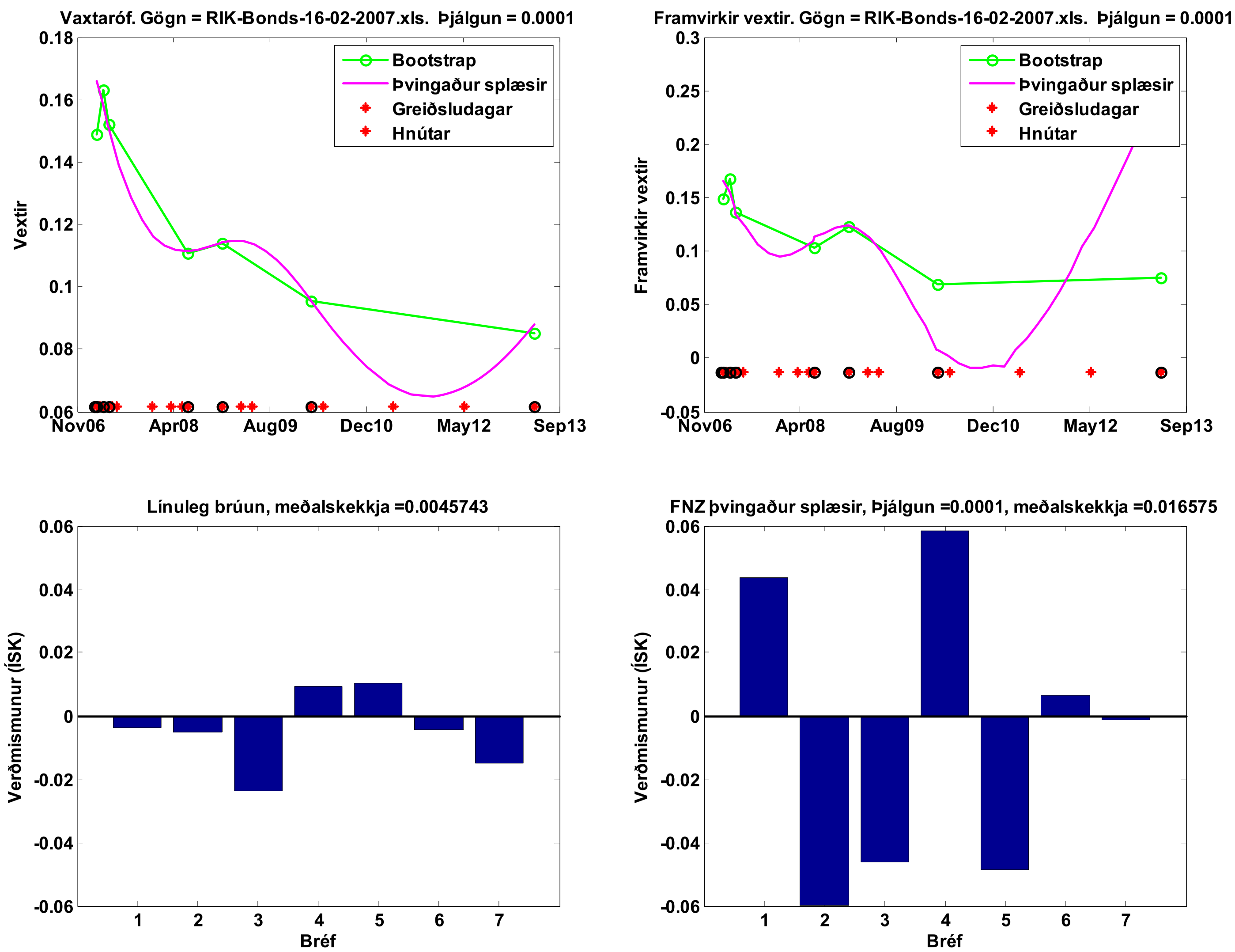
Þjálgun og verðskekkja



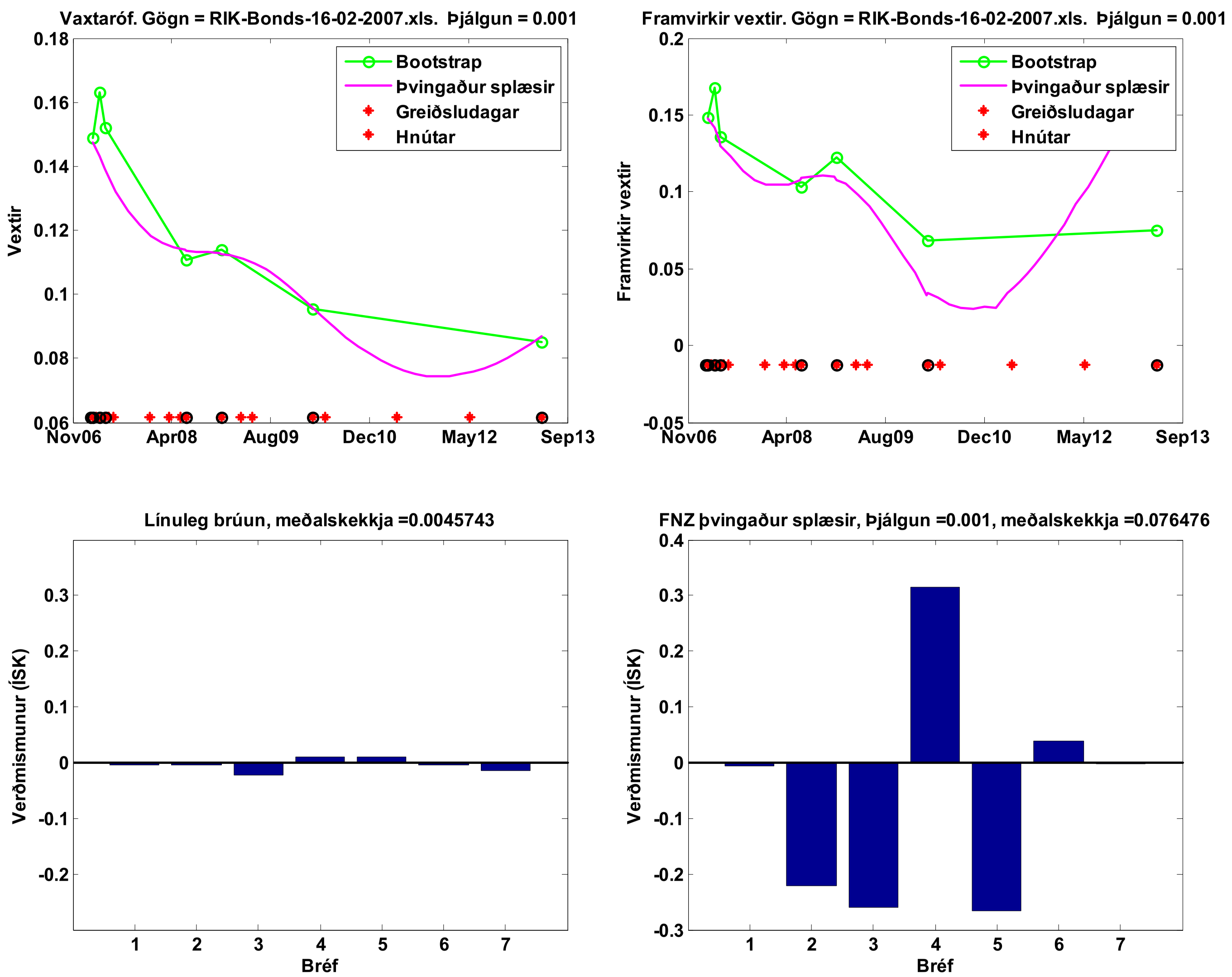
Þjálgun og verðskekkja



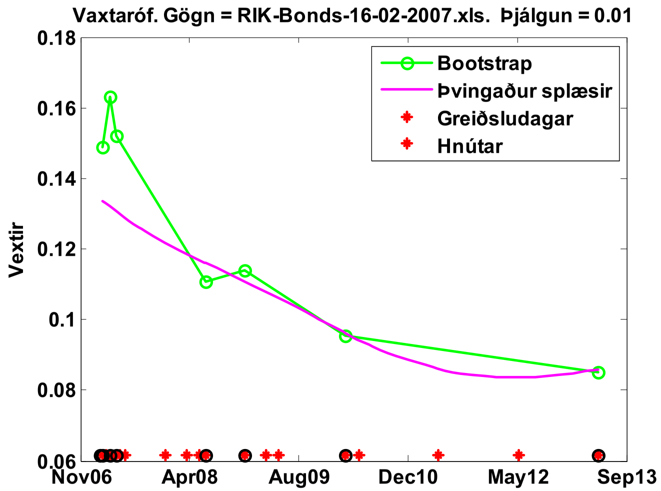
Þjálgun og verðskekkja

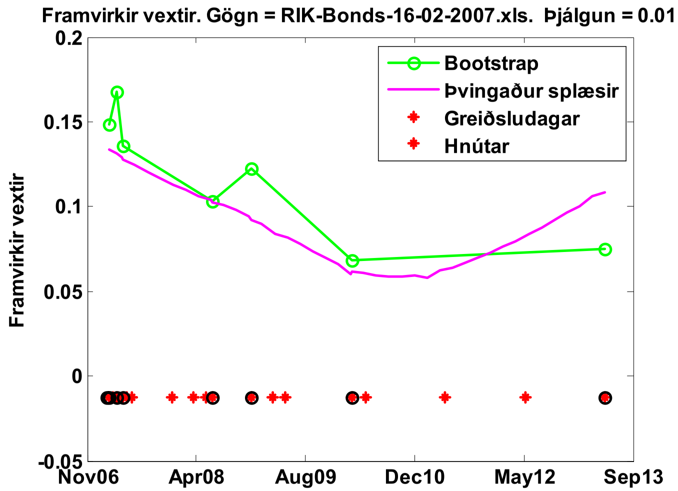


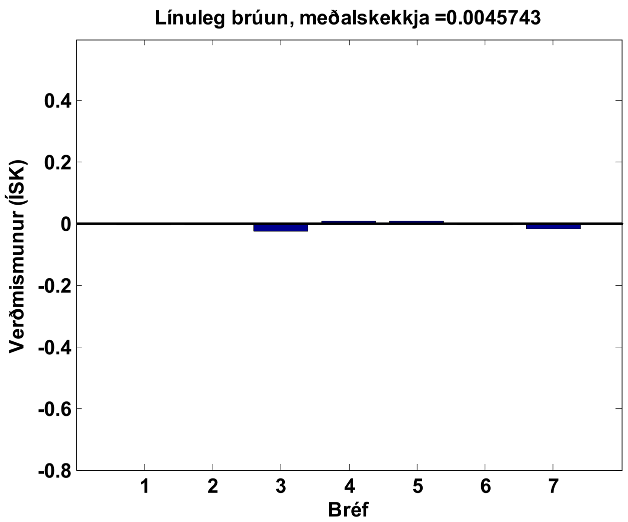
Þjálgun og verðskekkja

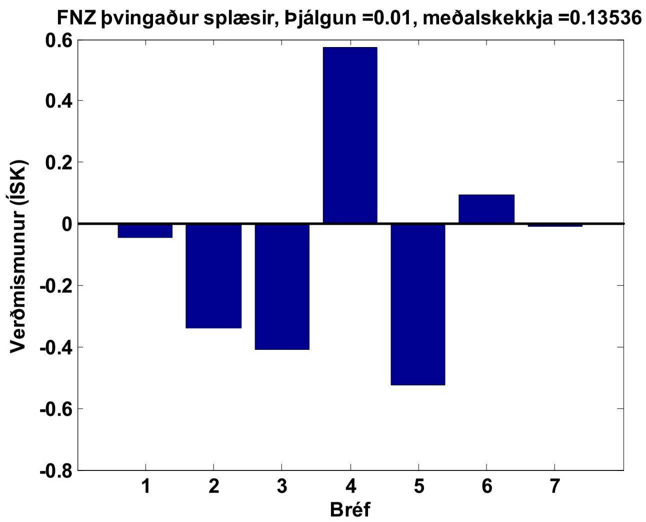


Þjálgun og verðskekkja









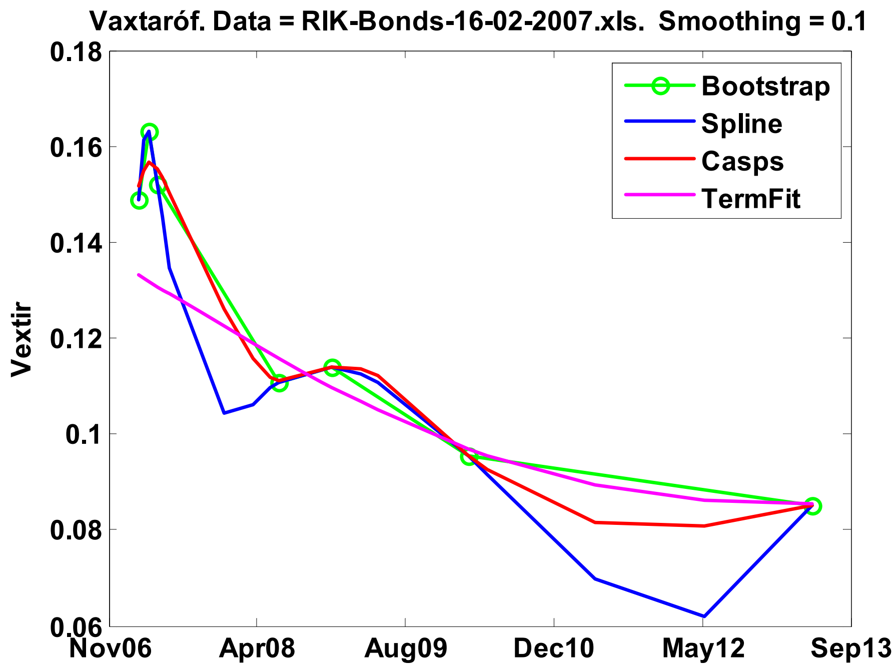
Verðskekkja

λ	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
ME	7.6×10^{-5}	0.157	0.165	0.176	0.188	0.201	0.215	0.229	0.243	0.257	0.269

λ	0.0	10^{-10}	10^{-9}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
ME	7.6×10^{-5}	3.7×10^{-5}	3.1×10^{-4}	2.3×10^{-3}	0.0069	0.0086	0.009	0.017	0.08	0.14	0.157

Nákvæmni hönnunar

- Athuganir sýna að
  - Rétt er að nota mismunandi þvingun fyrir mismunandi tímabil
  - Venjulega, $\lambda(t) < \lambda(t')$ **ef** $t < t'$



Niðurstöður

- Mismunandi framsetningar á vaxtarófinu
- Vaxtarófið þarf, á öllum tímum, að samræmast verði mismunandi vaxtaverkfæra
- Helstu vaxtaverkfæri, LIBOR, Eurodollar, Skipta vextir, skuldabréf
- Nálgunaraðferðir til að smíða vaxtarófið
- Jafnvægi á milli nákvæmni og þjálgunar

Niðurstöður

- Vaxtamarkaður á Íslandi er grunnur
- Erfitt að smíða vaxtaróf áreiðanlega
- Erfitt að verðleggja vaxtaverkfæri áreiðanlega
- Takmarkaðir möguleikar til vaxtaáhættustýringar
- Rétt að stuðla að virkari og dýpri markaði
  - Útgáfu fleiri skuldabréfa
  - Hvetja banka til að gefa upp skiptavexti
  - ...